

Übungsaufgaben zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Serie 4

abzugeben in der Vorlesung am 17.05.2005

Die Lösungen der Aufgaben 1, 2 sind schriftlich abzugeben, inklusive der Quelltexte der Programme (diese per Email) !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Man betrachte das lineare System $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \\ 2 \end{pmatrix}$$

für $\varepsilon = 1e - 15$. Zur Lösung dieses Systems soll ein Programm mit LU-Zerlegung ohne Pivotsuche, Vorwärts- und Rückwärtssubstitution geschrieben werden. Man berechne den absoluten Fehler in der Lösung x . Dazu vergleiche man die Lösung, die MATLAB oder SCILAB liefern ($x = A \setminus b$, dieser Befehl nutzt Spaltenpivotsuche).

2. Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und \bar{A} die durch Spaltenäquilibration aus A hervorgegangene Matrix

$$\bar{A} = DA, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}, \quad d_i = \frac{\max_{k=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}.$$

Man zeige, $\kappa_\infty(\bar{A}) \leq \kappa_\infty(A)$.

3. Quadratische $n \times n$ -Matrizen G_j der Form

$$G_j := \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -\ell_{j+1,j} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -\ell_{n,j} & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

heißen *Frobenius-Matrizen*. Man zeige:

- a) G_j ist nicht singular.
 b) G_j^{-1} ist gegeben durch

$$G_j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \ell_{j+1,j} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & \ell_{n,j} & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Man berechne das Produkt $G_1^{-1} G_2^{-1} \cdots G_{n-1}^{-1}$.