Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John
john@wias-berlin.de
Shahrad Jamshidi
shahrad.jamshidi@fu-berlin.de

Berlin, 02.01.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Serie 11

abzugeben vor der Vorlesung am Dienstag, dem 12.01.2010

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Es sei E die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Man überprüfe, ob folgende Abbildungen von $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$ Abstandsfunktionen auf $\mathbb{C}$ sind:
   a) $d(x, y) = |\mathrm{Re}(x) + \mathrm{Re}(y)|$, $x, y \in \mathbb{C}$,
   b) $d(x, y) = (\mathrm{Re}(x))^2 + (\mathrm{Re}(y))^2 + (\mathrm{Im}(x))^2 + (\mathrm{Im}(y))^2$,
   c) $d(x, y) = \max(|\mathrm{Re}(x) - \mathrm{Re}(y)|, |\mathrm{Im}(x) - \mathrm{Im}(y)|)$.

   4 Punkte

2. E sei eine beliebige mindestens zweielementige Menge. Man beweise, dass durch die Festsetzung
   $$d(x, y) = 0 \text{ für } x = y \text{ und } d(x, y) = 1 \text{ für } x \neq y$$
   (E, d) ein metrischer Raum (diskreter metrischer Raum) wird. **4 Punkte**

3. (a) Man zeige, dass $(\mathbb{N}, d)$ mit $d(m, n) := |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$ ein metrischer Raum ist.
   (b) Man zeige, dass jede einelementige Teilmenge von $\mathbb{N}$ in $(\mathbb{N}, d)$ offen ist. Man bestimmen weiterhin *alle* offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{N}, d)$.

   4 Punkte

4. *Beispiel einer rationalen Cauchy–Folge, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergiert.* Man untersuche die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit
   $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad x_1 = 2,$$
   auf Konvergenz. Man kann folgenden Lösungsweg wählen:

(a) Man zeige, dass die Folge aus rationalen Zahlen besteht.

(b) Man zeige $x_n^2 - 2 \geq 0$.

(c) Man untersuche $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie.

(d) Man schließe auf die Existenz eines Grenzwertes und bestimme anschließend dessen Wert.

4 Punkte

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !