Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 02.07.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis 2
Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 12
01.07. – 05.07.2002

Die Lösungen der Aufgaben 2, 3 und 5 b), c) sind in der Vorlesung am Mittwoch, dem 10.07.2002, schriftlich abzugeben ! Eine spätere Abgabe der Lösung wird nur in begründeten Ausnahmefällen akzeptiert !!! (Krankenschein)

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Das Riemann–Integral in $\mathbb{R}^n$

1. Man zeige, daß
$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1\}$$
eine Jordan–Nullmenge ist.
Hinweis: Satz 22.14 mit $x = (x', x_n)$, $D = \overline{B_1'(0)} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $r = \|x'\|_{\mathbb{R}^{n-1}}$, $f_{1,2} = \pm\sqrt{1-r^2}$.

2. Man berechne die folgenden Integrale im $\mathbb{R}^2$:
   (a) $\displaystyle\int\int_\Omega \frac{x^2}{y^2}\, dxdy$
   Ω werde begrenzt durch $x = 2$, $y = x$ und $xy = 1$,
   (b) $\displaystyle\int\int_\Omega \cos(x+y)\, dxdy$
   Ω werde begrenzt durch $x = 0$, $y = \pi$ und $y = x$.

4 Punkte

3. Man berechne das folgende Integral im $\mathbb{R}^3$:
$$\int\int\int_\Omega xy\, dxdydz$$
wobei Ω durch $z = xy$, $x + y = 1$, $z \geq 0$ beschrieben wird. **2 Punkte**

4. Durch Transformation auf Polarkoordinaten berechne man das folgende Doppelintegral:
$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dydx.$$
Hinweis: Die zugehörige Theorie wird voraussichtlich erst in der Vorlesung am 10.07.2002 kommen.

5. Man überprüfe, ob die angegebenen Vektorfelder Gradientenfelder sind und man bestimme gegebenenfalls eine Stammfunktion.

   (a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 12xy+3 \\ 6x^2 \end{pmatrix}$,

   (b) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{pmatrix}$,

   (c) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ -y-z \\ x-y \end{pmatrix}$.

   Aufgaben b) und c) schriftlich. **4 Punkte**