Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 25.06.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 11

24.06. – 28.06.2002

Die Lösungen der Aufgaben 2, Abschnitt "Mittelwertsatz, Taylorformel, lokale Extrema", und der Aufgaben 1 und 3, Abschnitt "Die Sätze von der impliziten Funktion und von der inversen Abbildung" sind in der Vorlesung am Mittwoch, dem 03.07.2002, schriftlich abzugeben ! Eine spätere Abgabe der Lösung wird nur in begründeten Ausnahmefällen akzeptiert !!! (Krankenschein)

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Mittelwertsatz, Taylorformel, lokale Extrema

1. Wirkungsverlauf von Medikamenten. Die Wirkung $W(x,t)$, die x Einheiten eines Medikamentes t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, wird häufig durch
$$W(x,t) = x^2(a-x)t^2e^{-t}, \quad 0 \le x \le a, \quad t \ge 0$$
dargestellt. Man bestimme die Dosis x und die Zeit t, so daß die Wirkung maximal wird.

2. Man bestimme die lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = xy^2$ unter der Nebenbedingung $x+y=1$.
3 Punkte

Die Sätze von der impliziten Funktion und von der inversen Abbildung

1. Man bestimme für die beiden folgenden Abbildungen den Bildbereich $V = f(U)$ und die Funktionaldeterminante. Man entscheide, ob die Abbildungen $f : U \to V$ lokale oder globale Diffeomorphismen sind und bestimme die (eventuell lokale) Umkehrabbildung:
   (a) $U = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+a, y+b)$, $a, b \in \mathbb{R}$,
   (b) $U = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 - x - 2, 3y)$.

   Hinweis: Ein Diffeomorphismus f wird lokal genannt, falls es Punkte $x \in U$ gibt, für die f die Eigenschaften eines Diffeomorphismus besitzt. f ist ein globaler Diffeomorphismus, falls f in jedem Punkt $x \in U$ ein lokaler Diffeomorphismus ist und eine globale Umkehrabbildung existiert, die die Eigenschaften eines Diffeomorphismus besitzt.
   4 Punkte

2. Sei
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \exp(x)\cos(y) \\ \exp(x)\sin(y) \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Man zeige, daß f für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Existiert eine globale Umkehrabbildung, so daß f auch ein globaler Diffeomorphismus ist ?

3. Sei
$$F(x,y,z) = x^4 + 2x\cos(y) + \sin(z).$$
Man zeige, daß für betragsmäßig kleine x, y, z die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ nach z aufgelöst werden kann und berechne für die Lösungsfunktion $z = h(x,y)$ die partiellen Ableitungen.
3 Punkte