Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 15.11.2001

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 5

19.11. – 23.11.2001

Die Lösung der Aufgaben 1 und 3 ist in der Vorlesung am Donnerstag, dem 22.11.2001, schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl n_0, so daß

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n \le n! \le \left(\frac{n}{2}\right)^n \tag{1}$$

für $n = n_0$ gilt. Weiterhin zeige man, daß die Aussage (1) für alle natürlichen Zahlen $n \ge n_0$ gilt.
Hinweis: Man benutze, daß

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \ge 2 \qquad \text{und} \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < 3 \quad \forall n \ge 5.$$

gilt. Vergleiche dazu auch die Aufgabe 4 der Serie 4. **3 Punkte**

2. Seien w und z komplexe Zahlen. Man zeige, daß

   (a) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$;

   (b) $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$;

   (c) $|z|^2 = z\,\overline{z}$;

   (d) $\overline{wz} = \overline{w}\,\overline{z}$;

   (e) $\overline{\left(\dfrac{w}{z}\right)} = \dfrac{\overline{w}}{\overline{z}}$ für $z \ne 0$.

3. Die Funktion f genüge auf dem Intervall $[a, b]$ der Lipschitz-Bedingung mit Konstanten L. Man zeige, daß die Funktion f auf $[a, b]$ beschränkt ist.

2 Punkte

4. Seien f und g Funktionen, die auf dem Intervall $[a, b]$ der Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstanten L_f und L_g genügen. Man zeige, daß die Summe $f + g$ und das Produkt $f \cdot g$ auf $[a, b]$ auch der Lipschitz-Bedingung genügen.

5. Sei f eine Funktion, die auf $[a, b]$ der Lipschitz-Bedingung genügt und nur ganzzahlige Werte annimmt. Man zeige, daß die Funktion f konstant ist.

6. Sei f auf dem Intervall $[a, b]$ monoton steigend und sei g auf $[a, b]$ monoton fallend. Man finde zusätzliche Bedingungen an f und g, so daß das Produkt $f \cdot g$ auf $[a, b]$ monoton fallend und der Quotient f/g auf $[a, b]$ monoton steigend ist.

7. Man zeige, daß
$$(a+b)^{\frac{p}{q}} \leq a^{\frac{p}{q}} + b^{\frac{p}{q}}, \qquad a, b \geq 0, \quad \frac{p}{q} \leq 1,$$
erfüllt ist.
Hinweis: Man diskutiere zunächst den Fall $a = b = 0$. Für den Fall $a + b \neq 0$ dividiere man durch die linke Seite der Ungleichung und forme die entstehende rechte Seite auf die Form $\lambda^{p/q} + (1 - \lambda)^{p/q}$ um.