Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 08.11.2001

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 4

12.11. – 16.11.2001

Die Lösung der Aufgabe 2 ist in der Vorlesung am Donnerstag, dem 15.11.2001, schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Natürliche Zahlen

1. Durch Anwendung der Rechengesetze für endliche Summen zeige man:

$$2\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu = a_1 b_1 + \sum_{\nu=2}^{n} (a_\nu - a_{\nu-1}) b_\nu + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu (b_\nu + b_{\nu+1}) + a_n b_n$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \frac{b_1 a_1}{b_1 - b_2} + \sum_{\nu=2}^{n} b_\nu \left[\frac{a_\nu}{b_\nu - b_{\nu+1}} - \frac{a_{\nu-1}}{b_{\nu-1} - b_\nu} \right] - \frac{b_{n+1} a_n}{b_n - b_{n+1}},$$

falls $b_\lambda \neq b_{\lambda+1}$ für jedes λ.

2. Man zeige mit vollständiger Induktion

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$,

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

5 Punkte

3. Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Das arithmetische Mittel A und das geometrische Mittel G dieser Zahlen sind definiert als

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

Man zeige mit vollständiger Induktion, daß stets

$$G \leq A$$

gilt.
Hinweis: Man forme zunächst die zu beweisende Aussage äquivalent zu

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} a_i$$

um. Nach Anwendung von

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i}{(n+1)\,\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}\right)^{n+1}$$

forme man den Ausdruck in der letzten Klammer so um, daß er die Form $1+x$ hat. Dann überprüfe man, daß x den Voraussetzungen der Bernoullischen Ungleichung genügt, und wende diese an. Der verbliebene Ausdruck läßt sich auf die Induktionsvoraussetzung zurückführen.

4. Gegeben seien die Folgen

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Man zeige, daß

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

gilt. Hinweis: Zum Beweis nutze man die Bernoullische Ungleichung. Man überlege sich vorher, wann in dieser Ungleichung die Gleichheit gilt.