6 Spezielle Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Man zeige, daß $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin x + \cos x$ mindestens eine Nullstelle besitzt und berechne alle Nullstellen.

2. Man zeige: Eine stetige Funktion
$$f : [a, b] \to [a, b]$$
hat mindestens einen Fixpunkt $\xi \in [a, b]$, d.h. $f(\xi) = \xi$.

7 Reihen in normierten Räumen

7.1 Anwendung von Konvergenzkriterien

1. Man analysiere die Reihen
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j+1} + \sqrt{j}} \quad , \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + \ldots + j}$$
auf Konvergenz.

2. Man verwende das Quotientenkriterium zur Bestimmung des Konvergenzverhaltens der folgenden Reihen:
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(3j)!}{(2j+1)!j!6^j} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{2^{2j-1}+1} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^j j!}{j^j}, \quad a > 0$$
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{(2\nu)!} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^\nu}{\nu}, \quad x \in \mathbb{C}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j 3^j j!}{j^j} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 n^k}{(2k)!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

3. Man bestimme die Summe der Reihen
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}.$$

4. Man prüfe unter Verwendung des Konvergenzkriteriums von Leibniz die Konvergenz der Reihen mit folgenden Gliedern:
$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \frac{(-1)^n}{\alpha n + \beta}, (\alpha, \beta > 0), \quad \frac{(-1)^n}{(n(n+3))^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

5. Wir betrachten die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

   1. Man zeige: Die Reihe ist alternierend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
   2. Man zeige $a_{2k} + a_{2k+1} > \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}$ und beweise mit Hilfe dieser Ungleichung die Divergenz der Reihe.
   3. Warum ist das Leibniz–Kriterium nicht anwendbar ?

7.2 Absolute Konvergenz

6. Man untersuche die folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

7. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

1. Man zeige, daß diese Reihe konvergiert. (Ihr Wert ist $\ln 2$.)
2. Man zeige, daß diese Reihe nicht absolut konvergiert.
3. Man finde eine Umordnung der Reihe, so daß der Reihenwert $1.5\ln(2)$ beträgt.
   Hinweis: Man kann wie folgt vorgehen: Man setze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}=0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+0+\ldots=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+\ldots$$

und betrachte dann

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n).$$

7.3 Potenzreihen

8. Man bestimme die Konvergenzradien ρ der Potenzreihen und untersuche die Konvergenz in den Punkten $z=\rho$ und $z=-\rho$!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!z^n}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}5^{(n^2)}z^{(n^2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{(n^2)}}{2^{n+1}n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}z^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+m},\ m\in\mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n$$