

Netzwerkfluss-Algorithmen für stochastische hydraulische Probleme in der Energiewirtschaft

Holger Heitsch, Berlin

Zusammenfassung

Der optimale Einsatz von Kraftwerksanlagen unter den Bedingungen des liberalisierten Strommarktes erfordert die Entwicklung spezieller Optimierungsmodelle und leistungsfähiger Algorithmen. Energiemanagementmodelle lassen sich als hochdimensionale mehrstufige stochastische Optimierungsprobleme darstellen. Sie umfassen die simultane Planung von Stromerzeugung und Stromhandel. Zur Lösung des Gesamtproblems sind häufig einheitsspezifische Teilprobleme zu lösen. Diese Teilprobleme stellen weiterhin mehrstufige stochastische Optimierungsprobleme sehr großer Dimensionen dar, weisen aber gleichzeitig besondere charakteristische Strukturen auf, die die Entwicklung spezifischer Lösungstechniken ermöglichen. Vorgestellt wird ein neuer Zugang zur stochastischen Modellierung hydraulischer Teilprobleme für die optimale Nutzung von Pumpspeicherwerken. Einbezogen werden dabei sowohl stochastische Kostenkoeffizienten als auch mögliche stochastische Zuflüsse in die Oberbecken der Anlagen. Aufgrund der typischen Struktur solcher Probleme erfolgt die Modellierung mit speziellen Methoden der Netzwerk-Optimierung. Dazu wird eine Erweiterung des klassischen (deterministischen) Minimum-Cost-Flow-Problems diskutiert. Ein angepasster Netzwerkfluss-Algorithmus, der die Struktur des vorliegenden Problems ausnutzt, wird vorgestellt. Der auf das klassische Relaxationsverfahren basierende Algorithmus zeigt Vorteile gegenüber verfügbaren Standardlösern hinsichtlich erzielter Rechenzeiten. Dies wird mit Testrechnungen an realitätsnahen Problemdata im Vergleich zu CPLEX 8.0, einem leistungsfähigen Standardlöser für lineare Optimierungsprobleme, belegt.

1 Einleitung

In der Vergangenheit ist ein ständig wachsendes Interesse an leistungsfähigen Optimierungsmodellen in der Energiewirtschaft zu beobachten. In Folge der Liberalisierung des deutschen Strommarktes sind auch die Anforderungen an die Energiemodelle gestiegen. Die Optimierung beschränkt sich nicht mehr nur auf die kostenoptimale Erzeugung von elektrischer Energie und der damit verbundenen optimalen Einsatzplanung von Kraftwerken sondern umfasst zusätzlich auch die simultane Optimierung des Stromhandels an den neugegründeten Strombörsen.

Diese Arbeit wurde im Rahmen des BMBF-Förderprogramms „Neue Mathematische Verfahren in Industrie und Dienstleistungen“ gefördert.

Um eine optimale Fahrweise von Kraftwerken zu gewährleisten, erfolgt die Optimierung innerhalb eines Optimierungszeitraums von mindestens einer Woche bis hin zu einem Jahr, wobei Unsicherheiten in den Eingangsgrößen zu berücksichtigen sind. Bisher geschah dies oft nur durch Einbeziehung des Erwartungswertes bzw. einer Prognose für die relevanten stochastischen Daten in die Optimierungsmodelle. Eine im Allgemeinen geeignetere Berücksichtigung der Stochastik beruht auf der Beschreibung von unsicheren Einflüssen mittels Szenariobäumen. Dabei werden aus historischen Daten und mit Hilfe statistischer Modelle eine Vielzahl von Szenarien generiert, die jeweils mögliche Realisierungen des stochastischen Datenprozesses in der Zukunft widerspiegeln. Zu den stochastischen Größen gehören beispielsweise Handelspreise von Bezugs- und Lieferverträgen für elektrische Energie, der Stromverbrauch (elektrische Last), Brennstoffpreise für den Betrieb von thermischen Kraftwerken sowie mögliche Zuflüsse in die Speicherbecken der hydraulischen Kraftwerke [5, 6, 8, 10, 13].

Die mathematische Formulierung solcher Energiemanagementmodelle führt oft zu sehr komplexen mehrstufigen stochastischen gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblemen sehr großer Dimensionen. Primale Lösungsmethoden sind im Allgemeinen nicht mehr realisierbar. Ein geeigneter Lösungsansatz besteht in der (stochastischen) Lagrangerelaxation verkoppelnder Restriktionen zur Zerlegung des Gesamtproblems in einheitsspezifische Teilprobleme [11, 14]. Von der effizienten Lösung dieser Teilprobleme hängt die Durchführbarkeit und die Schnelligkeit des Gesamtverfahrens entscheidend ab. Daher ist die Entwicklung leistungsfähiger Algorithmen, die die typische Struktur der Teilprobleme ausnutzen, von großer Bedeutung.

Bei der Dekomposition des Energiemanagementmodells ergeben sich die Teilprobleme des optimalen Stromhandels an der Strombörse, die thermischen Teilprobleme der optimalen Stromerzeugung mittels thermischer Einheiten sowie die hydraulischen Teilprobleme des optimalen Einsatzes von Pumpspeichieranlagen. Die Teilprobleme des Stromhandels und der thermischen Erzeugung umfassen die binäre Entscheidungsvariablen des Modells und stellen daher kombinatorische Optimierungsprobleme dar. Zur Lösung dieser Probleme kommen Methoden der stochastischen dynamischen Optimierung zum Einsatz.

Die hydraulischen Teilprobleme weisen eine typische Netzwerkfluss-Struktur auf, was die Anwendung angepasster Methoden der Netzwerkoptimierung ermöglicht [1, 2, 3, 7, 9, 15]. Netzwerkfluss-Probleme lassen sich mit speziell konzipierten Netzwerkfluss-Algorithmen oft um ein Vielfaches schneller lösen als andere Probleme vergleichbarer Dimension mit gewöhnlichen Optimierungsverfahren.

In der vorliegenden Arbeit werden die hydraulischen Teilprobleme genauer untersucht. Dabei steht im Abschnitt 2 die mathematische Formulierung als lineares Minimum-Cost-Flow-Problem sowie im Abschnitt 3 die stochastische Erweiterung des Problems im Mittelpunkt. Numerische Ergebnisse von Testrechnungen mit realistischen Problemdata sowie ein Vergleich mit CPLEX 8.0, einem leistungsfähigen Standardlöser für lineare Optimierungsprobleme, sind im Abschnitt 4 zu finden.

2 Mathematische Modellierung

Dem Einsatz hydraulischer Speicherkraftwerke kommt bei der Stromerzeugung eine große Bedeutung zu. Für viele Stromerzeuger mit gemischtem hydraulischen und nicht-hydraulischen Erzeugungspark ermöglicht der Einsatz solcher Kraftwerke nicht nur die Vorhaltung von Energiereserven für eventuell auftretende Lastspitzen sondern auch die flexible Optimierung der Eigenerzeugung in Zeiträumen hoher und niedriger Strompreise. Durch die zwischenzeitliche Speicherung von Energie in den Speicherbecken der Kraftwerksanlagen ist ein Kraftwerksbetreiber in der Lage, den mit geringen Erzeugungskosten produzierten oder den an der Börse zu günstigen Preisen bezogenen Strom (vornehmlich in Zeiträumen mit geringer Last in der Nacht oder am Wochenende), mit maximalem Gewinn in Zeiträumen höherer Marktpreise (meistens Spitzenlastzeiten am Tage) zu verkaufen.

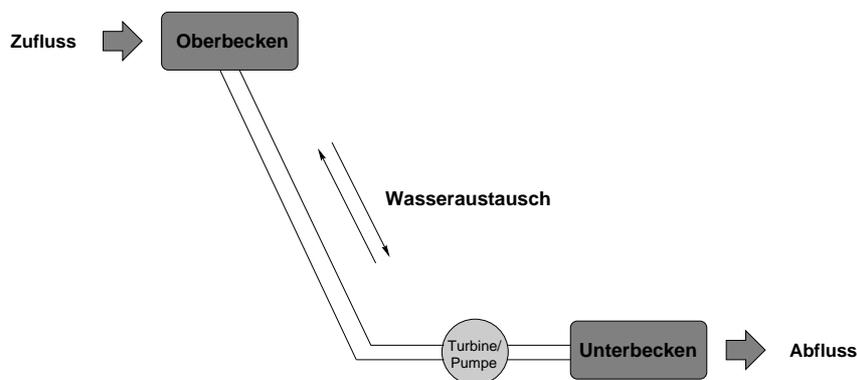


Abbildung 1: Hydraulisches Pumpspeicherwerk

Hydraulische Speicherkraftwerke können Energie in Form von potentieller Energie des Wassers in den Oberbecken speichern. Die Oberbecken sind künstliche Reservoirs, die durch natürliche Zuflüsse mit Wasser versorgt werden können. Im Gegensatz zu Laufwasserkraftwerken kann die Energie des zufließenden Wassers im Speicherbecken zurückgehalten werden, was eine Entkoppelung von Zufluss und Erzeugung bewirkt. Zu beachten ist, dass es hinsichtlich des Volumens der Zuflüsse starke saisonal bedingte Schwankungen geben kann. Man unterscheidet zwischen reinen Speicherkraftwerken und Pumpspeicherwerken. Letztere unterscheiden sich von den reinen Speicherkraftwerken durch die Möglichkeit, Wasser aus den Unterbecken zurück in die Oberbecken zu pumpen. Den typischen Aufbau eines Pumpspeicherwerks zeigt die Abbildung 1.

Bei der mathematischen Beschreibung soll im Folgenden der allgemeine Fall von Pumpspeicherwerken mit Zufluss modelliert werden. Die Optimierung erfolgt über einen gewissen Zeitraum. Sinnvoll ist die Diskretisierung des gesamten Zeitraums in nicht notwendigerweise äquidistante Zeitperioden, häufig jedoch in einheitliche Stunden-, Tages- oder Wochenintervalle.

In jeder einzelnen Zeitperiode ist die Entscheidung darüber zu treffen, ob Wasser unter Verbrauch von Strom aus dem Unterbecken in das Oberbecken gepumpt wird oder ob umgekehrt Wasser aus dem Oberbecken in das Unterbecken abgelassen wird, um über die Turbinen Strom zu generieren. Dabei ist die entsprechende Pump- bzw. Turbinenleistung zu bestimmen. Darüber hinaus sind in allen Zeitperioden die maximalen und minimalen Füllstände in den Becken einzuhalten. Folgende Bezeichnungen werden verwendet:

T	...	Anzahl der Zeitperioden ,
w^t/v^t	...	Pump- bzw. Turbinenleistung in Zeitperiode t ,
l^t	...	Füllstand des Oberbeckens zum Ende der Zeitperiode t ,
s^t	...	Zufluss in das Oberbecken in Zeitperiode t ,
λ^t	...	Kostenkoeffizient in Zeitperiode t ,
η	...	Wirkungsgrad des Pumpspeicherwerks ,
$l^{\text{in}}/l^{\text{end}}$...	Anfangs- bzw. Endfüllstand im Oberbecken .

Für die optimale Fahrweise eines Pumpspeicherwerks ergibt sich ein lineares Optimierungsproblem:

$$\min \sum_{t=1}^T \lambda^t (w^t - v^t) \quad \text{bzgl.} \quad (1)$$

$$l^t = l^{t-1} + \eta w^t - v^t + s^t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2)$$

$$w^{\min} \leq w^t \leq w^{\max}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3)$$

$$v^{\min} \leq v^t \leq v^{\max}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4)$$

$$l^{\min} \leq l^t \leq l^{\max}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5)$$

$$l^0 = l^{\text{in}}, \quad l^T = l^{\text{end}}. \quad (6)$$

Die Kostenkoeffizienten λ^t können sowohl tatsächliche Strompreise als auch aus dem Gesamtportfolio hervorgehende Kostenparameter darstellen. Charakteristisch für dieses Problem sind die Füllstandsbilanzen des Oberbeckens in (2). Diese Gleichungen stellen Kontinuitätsgleichungen für jede Zeitperiode dar. Abbildung 2 veranschaulicht das Zusammenwirken der einzelnen Komponenten und beschreibt die Dynamik des Füllstands im Oberbecken in einer Zeitperiode t .

Fügt man nun alle Zeitperioden zusammen, so entsteht ein typisches Netzwerkfluss-Problem. Netzwerkfluss-Probleme werden in der Regel in graphentheoretischer Notation formuliert. Ein Netzwerk besteht aus einer Menge von Punkten (Knoten) sowie verschiedener gerichteter Verbindungen (Kanten) zwischen den Punkten. Eine Reihe bekannter Problemklassen, wie Transportation-, Shortest-Path-, Assignment-, Maximum-Flow- und Minimum-Cost-Flow-Probleme, finden ihre Darstellung in Form von Netzwerkfluss-Problemen. All diese Probleme

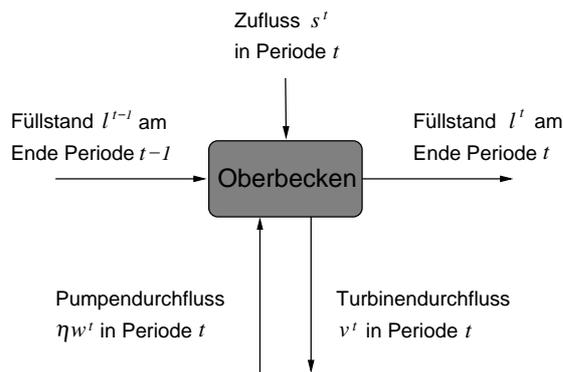


Abbildung 2: Füllstandskontinuität in Zeitperiode t

sind aufgrund ihrer kombinatorischen Struktur und aufgrund der in der Praxis häufig auftretenden großen Dimensionen sehr komplex und lassen sich daher nur selten mit Standardalgorithmen lösen. So wurden speziell angepasste Lösungsalgorithmen für die einzelnen Problemtypen entwickelt, die unter Ausnutzung der jeweiligen Fluss-Struktur wesentlich effizientere Lösungsmethoden darstellen.

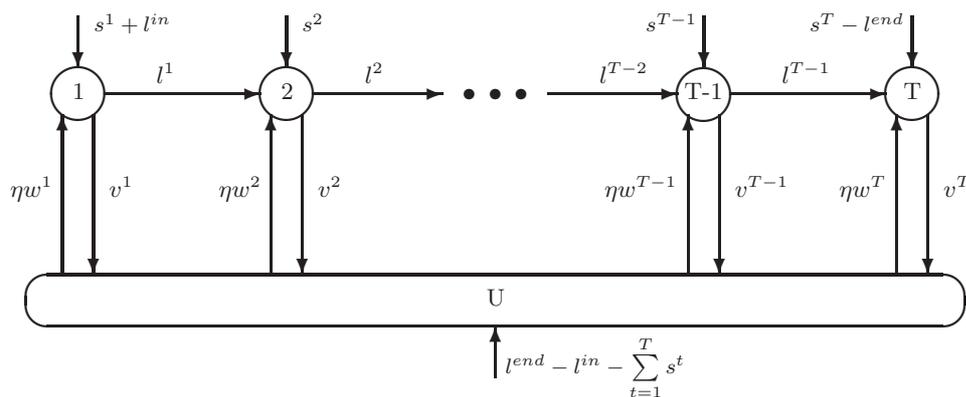


Abbildung 3: Netzwerkfluss eines Pumpspeicherwerks

Das Netzwerk eines Pumpspeicherwerks läßt sich wie in Abbildung 3 veranschaulichen. Zu jeder Zeitperiode t gehört ein Knoten, der die Dynamik des Oberbeckens beschreibt. Ein weiterer Knoten (in der Abbildung mit U bezeichnet) beschreibt die Gesamtdynamik des Unterbeckens für alle Zeitperioden. Das Optimierungsproblem (1)-(6) führt so zu einem *Minimum-Cost-Flow-Problem* der folgenden Form. Mit \mathcal{V} sei die Menge der Knoten und mit \mathcal{E} die Menge der gerichteten Kanten des Netzwerks bezeichnet:

$$\min \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} a_{ij} x_{ij} \quad \text{bzgl.} \quad (7)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \mathcal{E}} x_{ji} = s_i, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (8)$$

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E}. \quad (9)$$

Der Flussvektor x setzt sich aus den jeweiligen Komponenten für Füllstände des Oberbeckens, Turbinenleistungen sowie Pumpleistungen multipliziert mit dem Wirkungsgrad zusammen (vgl. Abbildung 3). Ziel ist es, einen zulässigen Flussvektor x mit minimalen Kosten zu finden. Dabei müssen sowohl die Kontinuitätsbedingungen (8) für alle Knoten des Netzwerks sowie die Kapazitätsbeschränkungen (9) für sämtliche Komponenten des Flussvektors x erfüllt werden. Die Kontinuitätsbedingungen (8) sind dabei äquivalent zu den Flussbedingungen (2) und (6) des Pumpspeicherproblems. Die Kapazitätsbedingungen (9) entsprechen den Restriktionen (3)-(5). Die Kostenkoeffizienten a_{ij} ergeben sich aus den Werten λ^t der entsprechenden Komponenten für Pump- und Turbinenleistung und sind Null für die Füllstandskomponenten des Oberbeckens. Bei der algorithmischen Lösung solcher Netzwerkprobleme kommen zwei grundlegende Verfahrensklassen zur Anwendung:

- (1) *Primale Methoden*: Ausgehend von einem zulässigen Flussvektor x wird eine Folge weiterer zulässiger Flussvektoren ermittelt, die gegenüber ihrem Vorgänger jeweils geringere primale Kosten besitzen. Dieser Methode der primalen Verbesserung der Kosten liegt die Tatsache zugrunde, dass solange der Flussvektor nicht optimal ist, sich ein einfacher Zyklus im Netzwerk finden lässt, so dass durch Erhöhung des Flusses innerhalb des Zyklus ein Flussvektor mit geringeren Kosten entsteht.
- (2) *Duale Methoden*: Diese Methoden lösen algorithmisch das zu (7)-(9) duale Problem. Dabei wird eine Folge dualer Variablen (Preisvektoren) mit jeweils verbesserten dualen Kosten ermittelt.

Zu den effizientesten primalen Verfahren gehört die Netzwerk-Simplex-Methode. Viele der in der Praxis verwendeten primalen Verfahren basieren auf den Ideen der Simplex-Methode. Ein wesentliches Verfahren, das zu den dualen Methoden gehört, ist die Relaxations-Methode. Der entscheidende Vorteil dieser Methode gegenüber klassischer Methoden ist die Möglichkeit der einfachen Wahl der dualen Aufstiegsrichtung und der daraus resultierenden Schnelligkeit des Algorithmus.

3 Stochastische Erweiterung

Bis jetzt wurde ein rein deterministisches Modell betrachtet, d.h. es wurde angenommen, dass alle Daten gegeben sind. Natürlich sind aber gerade die Preise und Zuflüsse im Modell mit starker Unsicherheit behaftet. Daher ist eine stochastische Modellierung vorzuziehen. Gute Einführungen in die Grundlagen der stochastischen Optimierung geben [4, 16, 17]. Das Grundprinzip der stochastischen Optimierung besteht darin, dass die Entscheidung optimal bezüglich aller möglichen Entwicklungen der zufälligen Größen getroffen wird. Mathematisch bedeutet das, dass bei einer Zerlegung des Optimierungszeitraums in T Zeitperioden der Datenprozess

$\{\xi^t\}_{t=1}^T$, bestehend aus den Komponenten Last, Zuflüsse und Preise für Brennstoffe sowie Liefer- und Bezugsverträge, einen multivariaten stochastischen Datenprozess mit diskreter Parametermenge $\{1, \dots, T\}$ und Zustandsraum \mathbb{R}^m bildet. Dabei wird vorausgesetzt, dass ξ nicht-antizipativ ist, d.h. ξ^t für kein t von zukünftigen Realisierungen von ξ abhängt. Im Falle endlich vieler Realisierungen führt eine solche Beschreibung zur Szenariobaumstruktur des Datenprozess. Ein Szenariobaum besteht aus einer endlichen Anzahl von Knoten, denen jeweils eine Realisierung des Datenprozess ξ für ein gewisses t zugeordnet wird. Ein Szenario entspricht einer Realisierung von ξ für alle t und damit einem vollständigen Pfad im Szenariobaum von der Wurzel bis zu einem Blatt. Abbildung 4 zeigt einen Szenariobaum versehen mit den typischen Bezeichnungen.

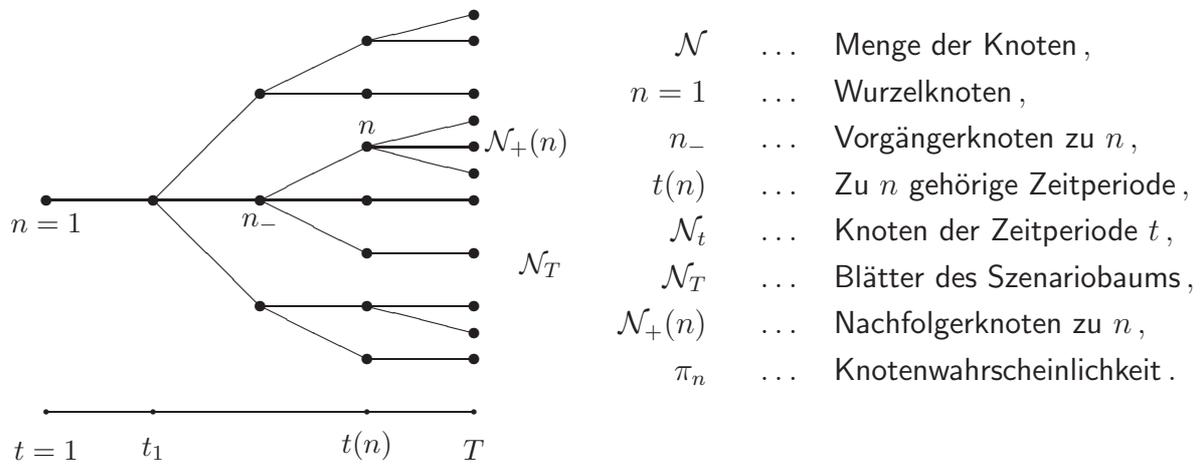


Abbildung 4: Szenariobaum bestehend aus einer Menge $\mathcal{N} = \{1, \dots, |\mathcal{N}|\}$ von Knoten

Die vom stochastischen Datenprozess ξ vorgegebene Szenariobaumstruktur überträgt sich auch auf den zugehörigen Entscheidungsprozess $\{v^t, w^t, l^t\}_{t=1}^T$. Im Falle des Pumpspeicherwerks werden jedem Knoten n die relevanten Komponenten des Datenprozess (λ^n, s^n) (Kostenkoeffizient und Zufluss) sowie die Entscheidungen (v^n, w^n, l^n) (Turbinenleistung, Pumpleistung, Füllstand des Oberbeckens) zugeordnet. Das Pumpspeicherproblem (1)-(6) geht über in folgendes stochastische Erwartungswertproblem:

$$\min \sum_{n \in \mathcal{N}} \pi_n \lambda_1^n (w^n - v^n) \quad \text{bzgl.} \quad (10)$$

$$l^n = l^{n-} - v^n + \eta w^n + s^n, \quad n \in \mathcal{N}, \quad (11)$$

$$v^{\min} \leq v^n \leq v^{\max}, \quad n \in \mathcal{N}, \quad (12)$$

$$w^{\min} \leq w^n \leq w^{\max}, \quad n \in \mathcal{N}, \quad (13)$$

$$l^{\min} \leq l^n \leq l^{\max}, \quad n \in \mathcal{N}, \quad (14)$$

$$l^{n-} = l^{\text{in}}, \quad n = 1, \quad (15)$$

$$l^n = l^{\text{end}}, \quad n \in \mathcal{N}_T. \quad (16)$$

Dieses Problem lässt sich nicht einfach als klassisches Netzwerkfluss-Problem formulieren. Schwierigkeiten bereiten die Flussbedingungen (11) für verschiedene Knoten mit demselben Vorgängerknoten. An solchen Knoten spaltet sich der Fluss entsprechend der Szenariobaumstruktur zu gleichen Anteilen auf (siehe Abbildung 5). Eine Erweiterung der klassischen Netz-

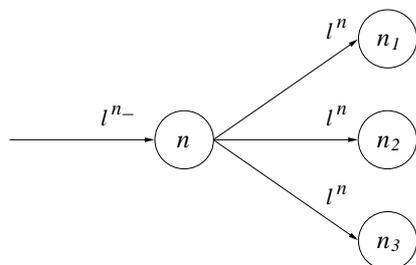


Abbildung 5: Flussverzweigung am Knoten n mit Nachfolgerknoten $\mathcal{N}_+(n) = \{n_1, n_2, n_3\}$

werkoptimierung ist nötig, um effiziente Netzwerk-Algorithmen auch auf solche Probleme anpassen zu können. Um die Verzweigungsstruktur abbilden zu können, muss eine Verallgemeinerung des Kantenbegriffs vorgenommen werden. Wenn bisher eine Kante als geordnetes Paar zweier Knoten des Netzwerks angesehen wurde, so sei eine verallgemeinerte Kante ein geordnetes Paar zweier disjunkter nichtleerer Teilmengen von Knoten. Die Menge aller Kanten \mathcal{E} kann beschrieben werden durch:

$$\mathcal{E} \subset \{(I, J) : I, J \subset \mathcal{V}; I, J \neq \emptyset \text{ und } I \cap J = \emptyset\}. \quad (17)$$

Eine Verzweigung des Flusses wie in Abbildung 5 kann demnach mit einer Kante der Form $(\{n\}, \mathcal{N}_+(n))$ beschrieben werden. Mit der verallgemeinerten Kantenmenge lässt sich ein erweitertes Minimum-Cost-Flow-Problem formulieren:

$$\min \sum_{(I, J) \in \mathcal{E}} a_{IJ} x_{IJ} \quad \text{bzgl.} \quad (18)$$

$$\sum_{\{(I, J) \in \mathcal{E} : i \in I\}} x_{IJ} - \sum_{\{(J, I) \in \mathcal{E} : i \in I\}} x_{JI} = s_i, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (19)$$

$$b_{IJ} \leq x_{IJ} \leq c_{IJ}, \quad \forall (I, J) \in \mathcal{E}. \quad (20)$$

Das stochastische hydraulische Problem (10)-(16) kann in dieser Form dargestellt werden. In Abbildung 6 ist das Netzwerk für ein Beispiel mit 2 Szenarien abgebildet. Die Optimierung erfolgt über 4 Zeitperioden bei einer Verzweigung des Szenariobaums nach der zweiten Zeitperiode.

Die Vorteile der netzwerkspezifischen Optimierung sind in der Regel in der Einfachheit der zu den gegebenen Problemen gehörenden dualen Probleme begründet. Es lassen sich im klassischen Fall oft sehr einfache und schnell berechenbare Optimalitätsbedingungen aufstellen.

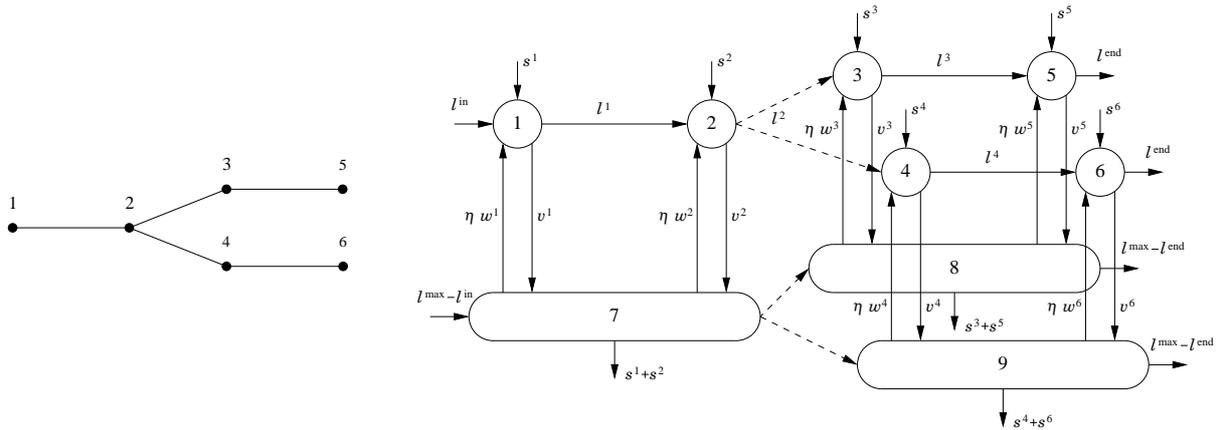


Abbildung 6: Szenariobaumstruktur und Netzwerkfluss für ein Beispiel mit 2 Szenarien

Um in der Lage zu sein, bekannte Algorithmen auf den Fall verallgemeinerter Netzwerke zu übertragen, bedarf es auch einer Erweiterung der Dualitätstheorie. Das zu Problem (18)-(20) gehörige duale Problem, welches durch Relaxierung der Flussbedingungen (19) entsteht (vgl. [12]), hat die folgende Form:

$$\max \left\{ \sum_{(I,J) \in \mathcal{E}} \mathcal{D}_{IJ}(\mu) + \sum_{i \in \mathcal{V}} s_i \mu_i : \mu \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|} \right\}, \quad \text{wobei} \quad (21)$$

$$\mathcal{D}_{IJ}(\mu) = \min_{b_{IJ} \leq x_{IJ} \leq c_{IJ}} \left(a_{IJ} + \sum_{j \in J} \mu_j - \sum_{i \in I} \mu_i \right) x_{IJ}. \quad (22)$$

Die Lagrangemultiplikatoren μ_i werden in diesem Zusammenhang auch Preise genannt und sind je einem Knoten im Netzwerk zugeordnet. Man kann eine verallgemeinerte *Complementary-Slackness-Bedingung (CS)* formulieren, die den Zusammenhang zwischen primalen und dualen Variablen herstellt und aus der sich die Optimalitätsbedingungen für das erweiterte Minimum-Cost-Flow-Problem ableiten lassen. Ein Paar (x, μ) , bestehend aus einem Flussvektor x und einem Preisvektor μ , erfüllt CS, falls x die Kapazitätsbeschränkungen (20) erfüllt und für alle Kanten $(I, J) \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\begin{aligned} x_{IJ} = b_{IJ} & \quad \text{falls} & \quad \sum_{i \in I} \mu_i < a_{IJ} + \sum_{j \in J} \mu_j, \\ b_{IJ} \leq x_{IJ} \leq c_{IJ} & \quad \text{falls} & \quad \sum_{i \in I} \mu_i = a_{IJ} + \sum_{j \in J} \mu_j, \\ x_{IJ} = c_{IJ} & \quad \text{falls} & \quad \sum_{i \in I} \mu_i > a_{IJ} + \sum_{j \in J} \mu_j. \end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass die Erfüllung von CS für ein zulässiges Paar (x, μ) sowohl notwendig als auch hinreichend dafür ist, dass x und μ primal bzw. dual optimal sind ([12, Proposition 1]). Diese Eigenschaft bildet eine wesentliche Grundlage für die algorithmische Lösung des

Problems. Das Grundprinzip eines dualen Algorithmus besteht in der iterativen Lösung des dualen Problems, bei der in jedem Iterationsschritt k ein Fluss/Preis-Paar (x^k, μ^k) mit CS beibehalten wird, bis schließlich nach endlich vielen Schritten ein optimales Lösungspaar gefunden wird. Optimalität liegt vor, wenn der Flussvektor x^k primal zulässig ist, d.h. neben den Kapazitätsbeschränkungen (wegen CS erfüllt) auch die Flussbedingungen erfüllt. Um im k -ten Schritt eine Verbesserung in Richtung Optimalität zu erzielen, gibt es zwei Möglichkeiten:

- (1) *Preisänderung*: Suche nach einer dualen Aufstiegsrichtung und
- (2) *Flussänderung*: Aufhebung der Verletzung von Flussbedingungen durch Flussausgleich.

Die Suche nach einer Aufstiegsrichtung bzw. nach einem Flussausgleich erfolgt durch ein systematisches Scannen bestimmter Knoten und ist für den klassischen Fall in [3, Kapitel 6] beschrieben. Wird eine Aufstiegsrichtung gefunden, so wird durch eine Änderung des Preisvektors ein dualer Aufstiegschritt vollzogen. Kann ein Flussausgleich ermittelt werden, der zur Aufhebung der Verletzungen der Flussbedingungen beiträgt, so wird eine entsprechende Änderung des Flusses in einem Flussausgleichsschritt vollzogen. Diese Methodik lässt sich auch auf den verallgemeinerten Fall erweitern und ist in [12] näher beschrieben. Dabei erfolgt das Scannen der Knoten pfadweise, entsprechend der Verzweigungsstruktur des Netzwerks. Abbildung 7 veranschaulicht die wesentlichen Schritte eines dualen Aufstiegsverfahrens.

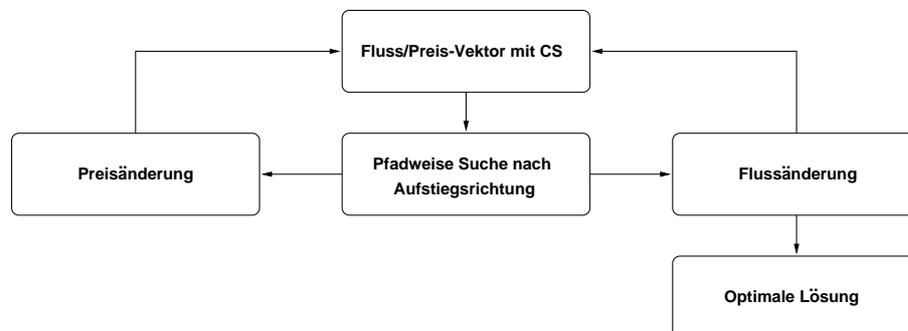


Abbildung 7: Flussdiagramm eines dualen Aufstiegsverfahrens

4 Testrechnungen

Zur Lösung der stochastischen hydraulischen Probleme wurde von uns ein speziell konzipierter erweiterter dualer Aufstiegsalgorithmus komplett in C implementiert. Grundlage dafür war das in [3, Kapitel 6] beschriebene Relaxationsverfahren, welches auf den Fall des verallgemeinerten Minimum-Cost-Flow-Problem erweitert wurde.

Ziel der Testrechnungen war es, den erweiterten dualen Aufstiegsalgorithmus, angepasst an die stochastischen hydraulischen Netzwerkprobleme, an großen realitätsnahen Testproblemen

im Vergleich mit Standardsoftware zu testen. Wichtigstes Kriterium beim Vergleich war dabei die Performance der verwendeten Algorithmen besonders in Hinblick auf Probleme mit sehr großer Dimension. Dazu haben wir eine große Zahl von hydraulischen Testproblemen generiert. Ausgehend von realistischen historischen Daten wurden zufällig Problemdaten verschiedener Dimensionen erzeugt. Zur Modellierung des stochastischen Datenprozesses verwendeten wir binäre Szenariobäume mit unterschiedlicher Anzahl von Szenarien. Die Zahl der Szenarien wurde dabei von wenigen tausend Szenarien bis zu mehr als einhunderttausend variiert. Alle Testläufe wurden auf demselben Rechner, ausgestattet mit einem Pentium-III-Prozessor mit 700 MHz und 128 MByte Hauptspeicher, durchgeführt.

Tabelle 1: Testrechnungen für stochastische hydraulische Testprobleme

Szenarien	Knoten	Kanten	Rechenzeit	Preisänderungen	Flussänderungen
2048	8190	12284	0.49 s	3213	9002
2048	8190	12284	0.52 s	3199	9331
2048	8190	12284	0.55 s	3178	9722
4096	16382	24572	1.17 s	6275	15777
4096	16382	24572	1.22 s	6160	15930
4096	16382	24572	1.28 s	6085	16847
8192	32766	49148	3.38 s	16005	34062
8192	32766	49148	1.80 s	12801	33290
8192	32766	49148	1.90 s	13019	34135
16384	65534	98300	4.63 s	26509	71195
16384	65534	98300	4.20 s	26074	70852
16384	65534	98300	5.11 s	27245	72398
32768	131070	196604	12.32 s	58817	141076
32768	131070	196604	11.61 s	58207	142150
32768	131070	196604	19.60 s	71205	155335
65536	262142	393212	33.30 s	130478	267622
65536	262142	393212	34.01 s	129028	270890
65536	262142	393212	46.35 s	133098	274844
131072	524286	786428	87.77 s	279919	521973
131072	524286	786428	99.07 s	274566	534538
131072	524286	786428	86.66 s	276725	537894

Tabelle 1 zeigt die numerischen Ergebnisse der neuen Methode für eine Reihe hydraulischer Probleme unterschiedlicher Dimensionen. Die ersten drei Spalten der Tabelle charakterisieren die Problemgröße, d.h. die Anzahl der Szenarien, die daraus resultierende Anzahl der Knoten im Netzwerk sowie die Anzahl der Kanten im Netzwerk. In den übrigen Spalten sind die erzielten Rechenzeiten sowie die jeweils vom Algorithmus durchgeführten Iterationen, aufgeteilt in Aufstiegsschritte (Preisänderungen) und Flussausgleichsschritte (Flussänderungen),

dokumentiert. Die Rechenergebnisse zeigen, dass selbst Probleme mit einer Knotenanzahl von über einer halben Million, in weniger als 100 Sekunden zu lösen sind. Abbildung 8 zeigt das approximativ lineare Anwachsen der Rechenzeiten bei steigender Anzahl von Szenarien.

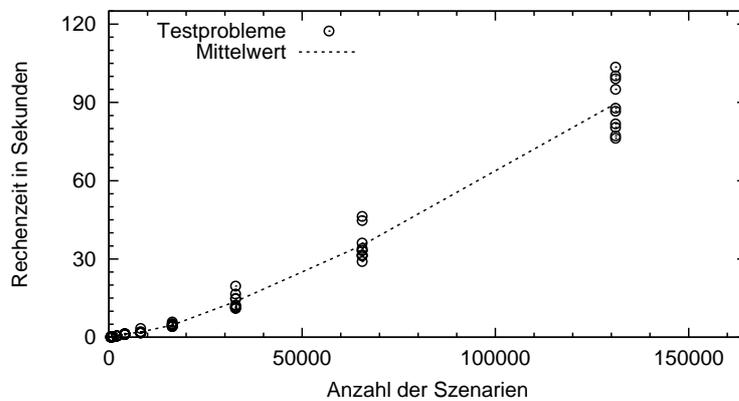


Abbildung 8: Rechenzeit in Abhängigkeit der Anzahl von Szenarien

In einer zweiten Testreihe haben wir den neuen Netzwerkfluss-Algorithmus mit den schnellen linearen Standardlösern von CPLEX 8.0 verglichen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 aufgeführt. Sie zeigen den klaren Vorteil des neuen Netzwerkzugangs gegenüber den Standardalgorithmen. So ergeben sich bis zu zehn mal schnellere Rechenzeiten bei großen Problemen.

Tabelle 2: Vergleich des dualen Aufstiegsalgorithmus (DA) mit CPLEX 8.0

Szenarien	CPLEX 8.0				DA
	primal	dual	baropt	netopt	
8192	18.07 s	11.42 s	18.49 s	10.37 s	1.64 s
8192	19.03 s	11.81 s	17.49 s	10.47 s	1.92 s
8192	19.59 s	11.38 s	18.53 s	9.54 s	1.56 s
32768	129.78 s	111.03 s	120.02 s	96.82 s	12.64 s
32768	114.84 s	118.21 s	92.83 s	103.21 s	14.40 s
32768	147.53 s	112.28 s	104.60 s	95.32 s	9.46 s
131072	881.0 s	1131.2 s	674.0 s	1088.4 s	89.6 s
131072	961.3 s	1160.7 s	820.0 s	1100.8 s	81.6 s
131072	902.2 s	1079.9 s	644.3 s	1013.1 s	63.2 s

Literatur

- [1] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti and J.B. Orlin: Network flows - Theory, Algorithms and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1993.
- [2] M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis and H.D. Sherali: Linear programming and network flows, John Wiley & Sons, 2nd Ed., N.Y. 1990.

- [3] D.P. Bertsekas: Network optimization - Continuous and discrete models, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts 1998.
- [4] J.R. Birge and F. Louveaux: Introduction to Stochastic Programming, Springer, New York, 1997.
- [5] J.H. Bogensperger: Wochenplanung in Stromhandel und Erzeugung, *Optimierung in der Energieversorgung. Planungsaufgaben in liberalisierten Energiemärkten*, VDI-Berichte 1508, VDI-Verlag Düsseldorf, 1999, 183–198.
- [6] D. Dentcheva and W. Römisch: Optimal power generation under uncertainty via stochastic programming, *Stochastic Programming Methods and Technical Applications* (K. Marti and P. Kall Eds.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. 458, Springer, Berlin 1998, 22–56.
- [7] S. Feltenmark and P.O. Lindberg: Network methods for head-dependent hydro-power scheduling, *Network Optimization* (P.M. Pardalos, D.W. Hearn and W.W. Hager Eds.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. 450, Springer, Berlin 1997, 249–264.
- [8] S.-E. Fleten, S.W. Wallace and W.T. Ziemba: Hedging electricity portfolios via stochastic programming, *Decision Making under Uncertainty: Energy and Power* (C. Greengard and A. Ruszczyński Eds.), IMA Volumes in Mathematics and its Applications Vol. 128, Springer, New York 2002, 71–93.
- [9] L.R. Ford and D.R. Fulkerson: Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton, NJ 1962.
- [10] N. Gröwe-Kuska, H. Heitsch und W. Römisch: Modellierung stochastischer Datenprozesse für Optimierungsmodelle der Energiewirtschaft, *IT-Lösungen für die Energiewirtschaft in liberalisierten Märkten*, VDI-Berichte 1647, VDI-Verlag, Düsseldorf 2001, 69–78.
- [11] N. Gröwe-Kuska, K.C. Kiwiel, M.P. Nowak, W. Römisch and I. Wegner: Power management in a hydro-thermal system under uncertainty by Lagrangian relaxation, *Decision Making under Uncertainty: Energy and Power* (C. Greengard and A. Ruszczyński Eds.), IMA Volumes in Mathematics and its Applications Vol. 128, Springer, New York 2002, 39–70.
- [12] H. Heitsch and W. Römisch: Hydro-Storage Subproblems in Power Generation: An Approach with a Relaxation Method for Network Flow Problems, *IEEE Bologna Power Tech Proceedings* (A. Borghetti, C.A. Nucci, M. Paolone eds.), 2003.
- [13] B. Krasenbrink: Integrierte Jahresplanung von Elektrizitätserzeugung und -handel, ABEV Band 81, Klinkenberg Verlag, Aachen, 2002.
- [14] M.P. Nowak and W. Römisch: Stochastic Lagrangian relaxation applied to power scheduling in a hydro-thermal system under uncertainty, *Annals of Operations Research* 100, 2000, 251–272.
- [15] R.T. Rockafellar: Network Flows and Monotropic Programming, Wiley, New York, 1984.
- [16] W. Römisch and R. Schultz: Multistage stochastic integer programs: An introduction, *Online Optimization of Large Scale Systems*, Springer-Verlag, Berlin 2001, 579–598.
- [17] A. Ruszczyński and A. Shapiro (Eds.): *Stochastic Programming*. Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 10, North-Holland, Amsterdam 2003 (to appear).