



---

# **Inverse Probleme in der klassischen Optik**

**Carl Zeiss AG**

**Optikdesign / Herbert Gross**

**25.10.2004**

# Inverse Probleme in der Optik

## Inhalt



- Problemstellung
- Algorithmen
- TIE-Verfahren
- Gerchberg-Saxton-Algorithmus
- Systemprüfung
- Quantitative Phasenmikroskopie
- Analog-digitale Bildgebung : Beispiel EDF
- Zusammenfassung

# Inverse Probleme in der Optik

## Inhalt



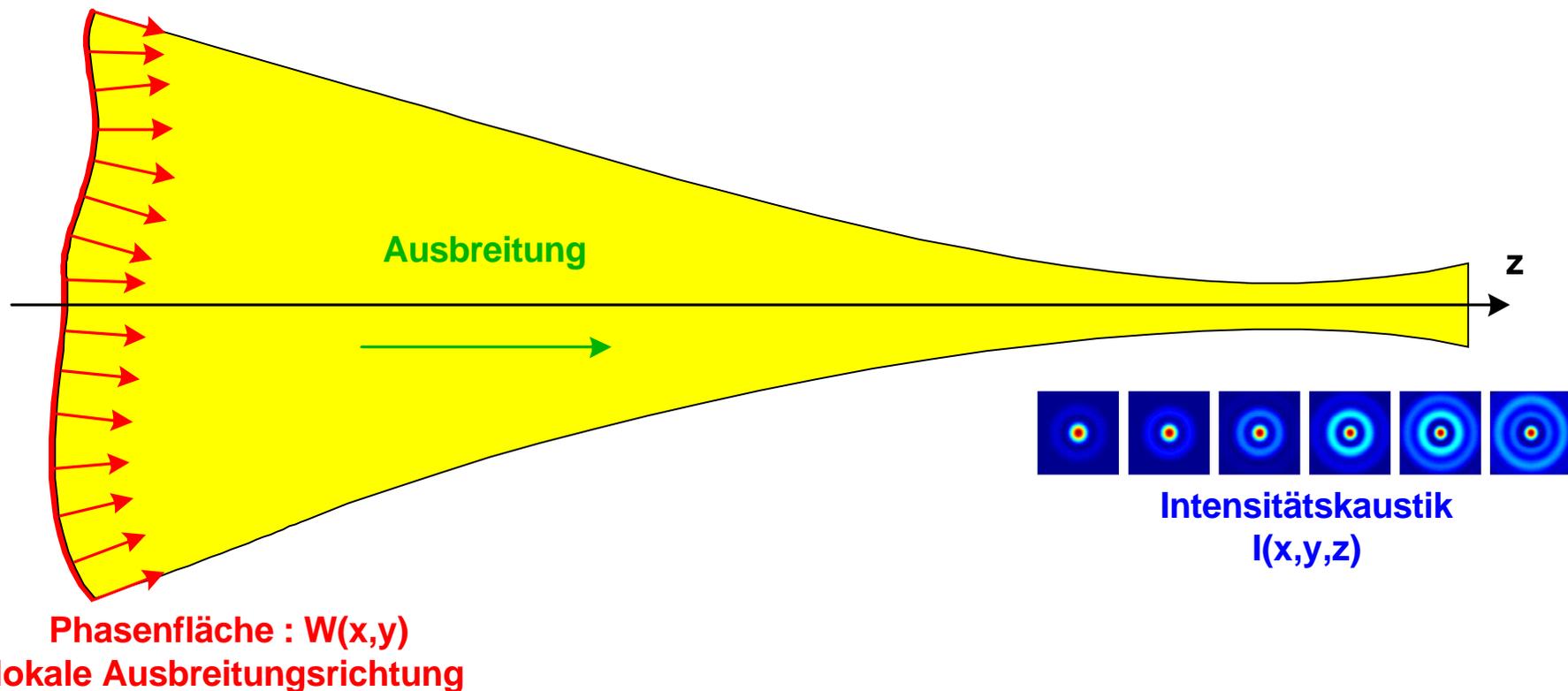
- 
- **Problemstellung**
  - Algorithmen
  - TIE-Verfahren
  - Gerchberg-Saxton-Algorithmus
  - Systemprüfung
  - Quantitative Phasenmikroskopie
  - Analog-digitale Bildgebung
  - Zusammenfassung

# Inverse Probleme in der Optik

## Prinzip des Phase Retrieval



- Die **Phasenfläche** legt die lokale Ausbreitung fest
- Bei der **Ausbreitung** wandelt sich eine Phasen- in **Intensitätsverteilung** um
- In der Änderung der Intensitätsverteilung ist die Information über die Phase enthalten

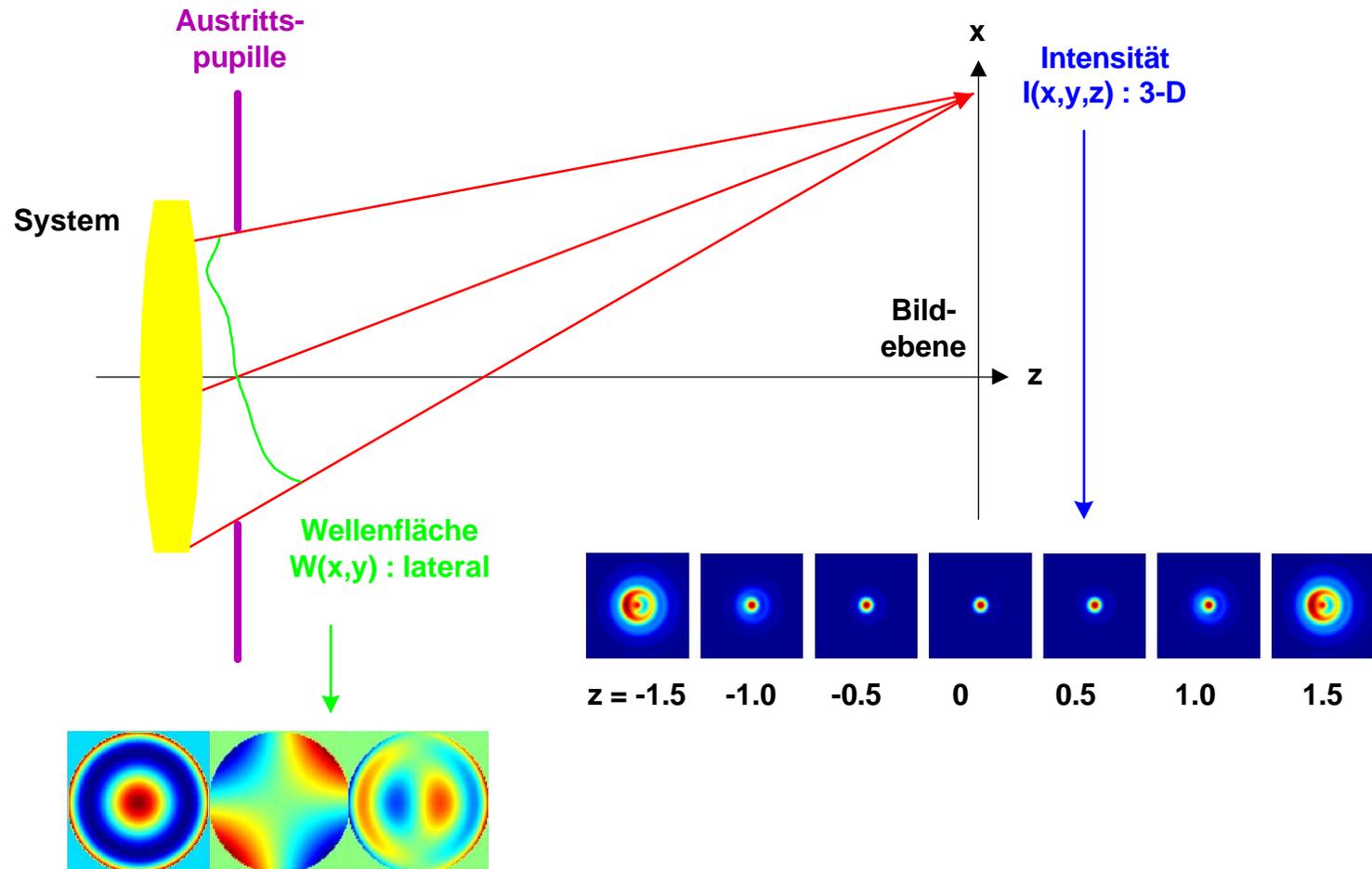


# Inverse Probleme in der Optik

## Pupillenfunktion und Punktbild



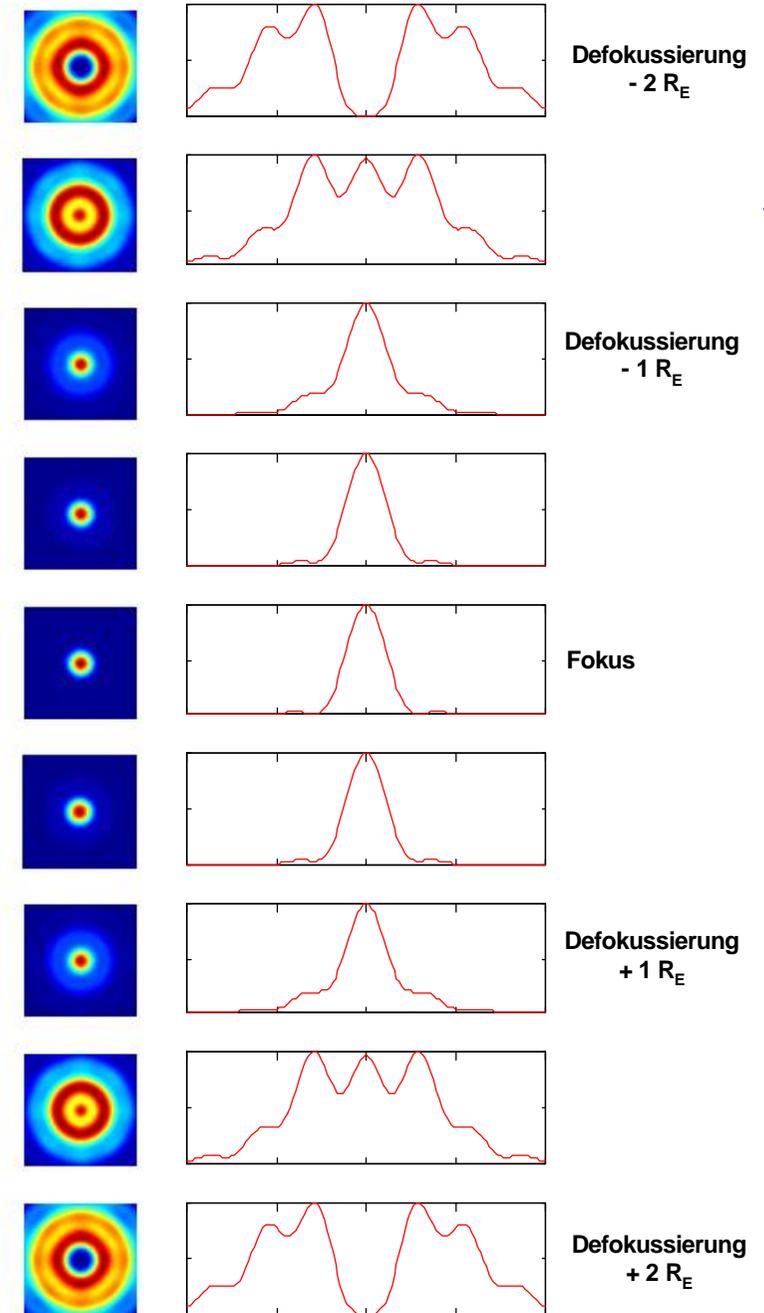
- Konventionell : Wellenfläche in Pupille lateral beschrieben :  $E_{\text{pup}}(x_p, y_p)$
- Intensität im Bildraum dreidimensional beschrieben :  $I(x, y)$



# Inverse Probleme in der Optik

## Psf bei Defokussierung

- Defokussierung :
  - Psf verbreitert sich
  - es entsteht Ringsystem
- z-Bildstack
  - Variation der Intensitätsprofile mit z
  - Rückrechnung auf Startphase



# Inverse Probleme in der Optik

## Anwendungen



- **Anwendungen** von Retrieval- und Deconvolution-Verfahren :
  1. Klassisches Image-Restoration  
Blurr / Degradation durch :
    - Systemaberrationen ( Hubble )
    - Bewegung
    - Atmosphärische Störungen ( Astronomie )
    - Streulicht und Detektor-Rauschen
  2. Phasenrückgewinnung für die Steuerung adaptiver Spiegel
  3. Berechnung von diffraktiven Elementen zur Strahlformung
  4. Super-Resolution-Ansätze
- Es existieren sehr viele **Algorithmen** und Methoden, teilweise kann man per Internet komplette SW-Pakete downloaden
- Es gibt kein allgemeingültiges Verfahren, welches alle Probleme löst :  
je nach Konstellation ist das **Verfahren anzupassen** und zu optimieren
- Speziell für **komplexe Rekonstruktionen** sind Literatur / Erfahrungen noch nicht sehr weit entwickelt

# Inverse Probleme in der Optik

## Inhalt



- 
- Problemstellung
  - **Algorithmen**
  - TIE-Verfahren
  - Gerchberg-Saxton-Algorithmus
  - Systemprüfung
  - Quantitative Phasenmikroskopie
  - Analog-digitale Bildgebung
  - Zusammenfassung

# Inverse Probleme in der Optik

## Verfahren : Allgemeines



- **Einteilung** der Verfahren :
  1. **Direkte** Verfahren :

Inverse Filter ( Wiener, Tikhonov, TIE ), nicht-iterativ, schnell, Rauschen verstärkt, Regularisierung notwendig
  2. **Iterative** Verfahren :

Iterative non-least-square-Verfahren, mit Nebenbedingungen  
Zahlreiche Optimierungsstrategien, Auswahl der Meritfunktion maßgebend
- Speziell auch Verfahren ohne Kenntnis der Übertragungsfunktion :

Blind-Restoration, Optimierung von Wahrscheinlichkeiten,  
Maximierung der Entropie
- Grundsätzliches Problem :

**Zwillingsbilder** haben gleiches Fourierspektrum, behindert Konvergenz
- Bei nicht-weissem **Rauschen** ( Poisson, Intensitäts-proportional ) : nichtlineares Problem, inverse Filterung versagt

# Inverse Probleme in der Optik

## Mathematische Formulierung



- Mathematische Formulierung :  
Allgemein :  
Integralgleichung  
inverses Problem

$$I_{image}(x) = \int I_{psf}(x, x') \cdot I_{object}(x, x') dx' + I_{noise}(x)$$

- Vereinfachung :  
Psf **ortsinvariant** : Faltung  
Betrachtung im Fourierraum

$$I_{image}(x) = I_{psf}(x) * I_{object}(x) + I_{noise}$$

$$I_{image}(v) = I_{psf}(v) \cdot I_{object}(v) + I_{noise}$$

- **Diskretisierung** : pixelierte Bilder

$$I_{jk}^{(ima)} = \sum_{j'} \sum_{k'} I_{j-j', k-k'}^{(psf)} \cdot I_{j', k'}^{(obj)} + I_{jk}^{(noi)}$$

Damit formal :  
lineares Gleichungssystem

$$\vec{g} = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \vec{n}$$

- **NLSQ-Lösung** wegen  
Rauschterm  
mit Nebenbedingungen

$$\left| \mathbf{A} \cdot \vec{x} - \vec{b} \right|^2 = \min$$

$$\Phi = \left| \mathbf{A} \cdot \vec{x} - \vec{b} \right|^2 + \mu \cdot \left| \vec{x} \right|^2 = \min$$

# Inverse Probleme in der Optik

## Verfahren : Übersicht zu den wichtigsten Algorithmen



	Verfahren	
1	<b>direkte nicht-iterative Verfahren</b>	
1.1	Inverses Filter, Wiener oder Tikhonov	sehr schlecht konditioniert
1.2	TIE-Methode	Inverser Laplace-Operator
2.	<b>Iterative nichtlineare Verfahren</b>	
2.1	Landweber, error reduction , successive approximation	Allgemein $x_{k+1} = x_k + \tau \cdot (b - Ax_k)$
2.1.1	Gerchberg Saxton	Spezialfall von Landweber, Wechsel von Orts- und Fourierraum
2.1.2	van Cittert	Spezialfall von Landweber mit $Ax = g$
2.2	Steepest descent	schlecht konvergentes Gradientenverfahren
2.3	POCS-Verfahren	Projektion P in konvexe Räume $AP\vec{x} = P\vec{b}$
2.3.1	Conjugierte Gradienten	verbesserte Konvergenzgeschwindigkeit
2.3.2	Lanczos-Methode	speziell tridiagonaler Projektion
2.4	Maximum likelihood	ML-Verfahren, spezielles Entropiefunktional
2.4.1	LucyRichardson	error reduction Algorithmus für ML-Funktional
2.4.2	Bayesian methods	ML-Funktional mit Nebenbedingungen
2.4.3	Wienerfilterung	ML-Funktional, Gauss Rauschen
2.4.4	TikhonovFilter, Regularisierung	ML-Funktional, weißes Rauschen, Regularisierung $\mu = (\epsilon / E)^2$
2.5	blind deconvolution	wenn x und A unbekannt, ohne Kenntnis der PSF
2.6	pixon Algorithmus	ML-Ansatz mit trustregions
2.7	simulated annealing	Globale Optimierung, sehr langsam

# Inverse Probleme in der Optik

## Inhalt



- 
- Problemstellung
  - Algorithmen
  - **TIE-Verfahren**
  - Gerchberg-Saxton-Algorithmus
  - Systemprüfung
  - Quantitative Phasenmikroskopie
  - Analog-digitale Bildgebung
  - Zusammenfassung

# Inverse Probleme in der Optik

## TIE-Algorithmus



- Grundlage des Verfahrens :  
Transport of intensity equation  
( aus Wellengleichung )

$$-k \cdot \frac{\partial I(\vec{r}, z)}{\partial z} = \nabla_{\perp} \cdot [I(\vec{r}, z) \cdot \nabla_{\perp} \Phi(\vec{r}, z)]$$

- Prinzip :  
Phase bestimmt Intensitätsgradient
- Lösungsansätze der Differentialgleichung :
  1. **Fourierzerlegung** führt auf LGS ( große Matrizen )  
aber : sehr einfache Lösung bei konstanter Objekttransmission
  2. Lösung über Hilfsfunktion und **inversen Laplace**-Operator  
Inverse Frequenzraumfilterung liefert schnellen nicht-iterativen Algorithmus  
Ebenfalls starke Vereinfachung bei konstanter Transmission

# Inverse Probleme in der Optik

## Inhalt



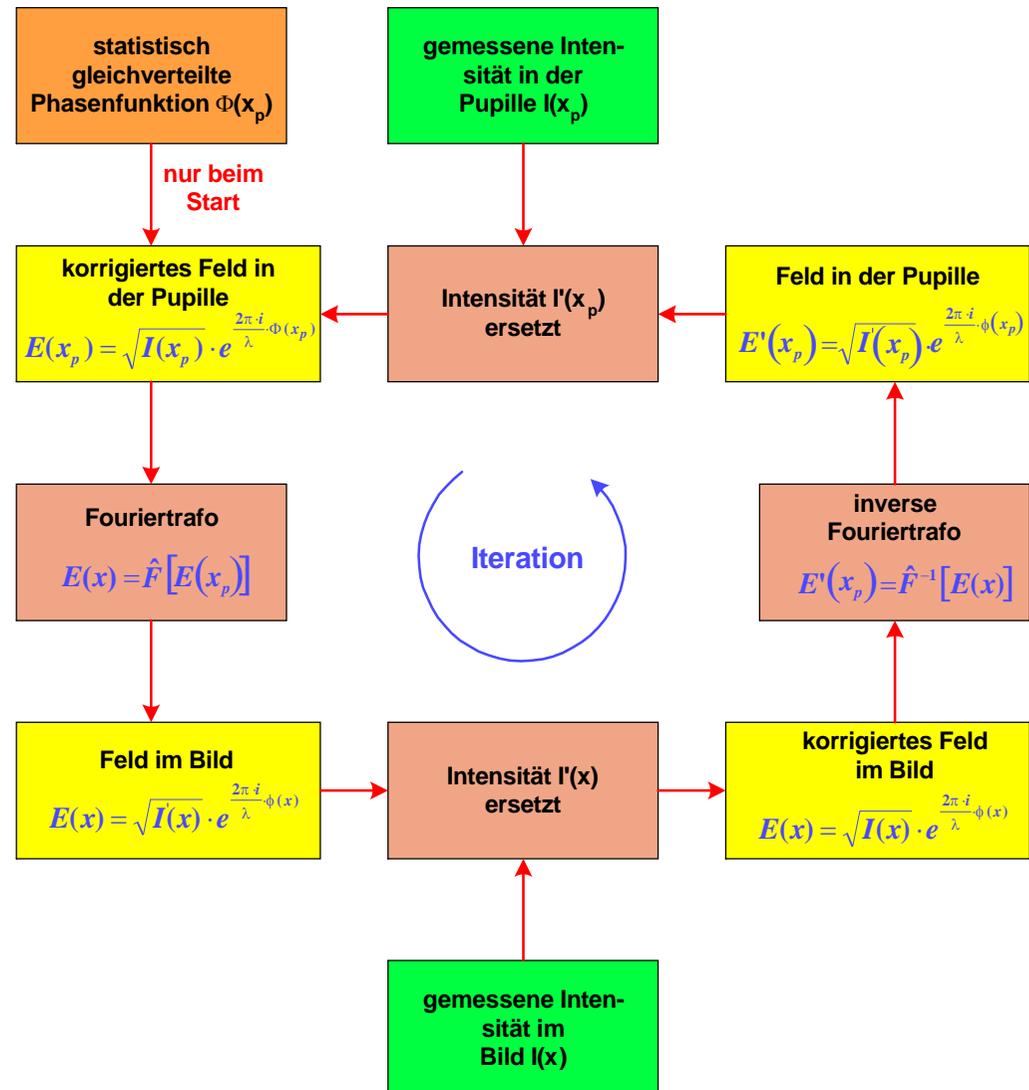
- 
- Problemstellung
  - Algorithmen
  - TIE-Verfahren
  - Gerchberg-Saxton-Algorithmus
  - Systemprüfung
  - Quantitative Phasenmikroskopie
  - Analog-digitale Bildgebung
  - Zusammenfassung

# Inverse Probleme in der Optik

## Gerchberg-Saxton-Algorithmus



- Gerchberg-Saxton-Algorithmus :  
 Iterative Rekonstruktion der Wellenfläche nach Vergleich mit PSF,  
 Jeweils bekannte Intensität eingesetzt
- Streng konvergenter Algorithmus, aber häufig **Stagnation**
- Alternativen / Abhilfe :
  - Allgemeine Fit-Algorithmen
  - Messung ganzer z-Stapel

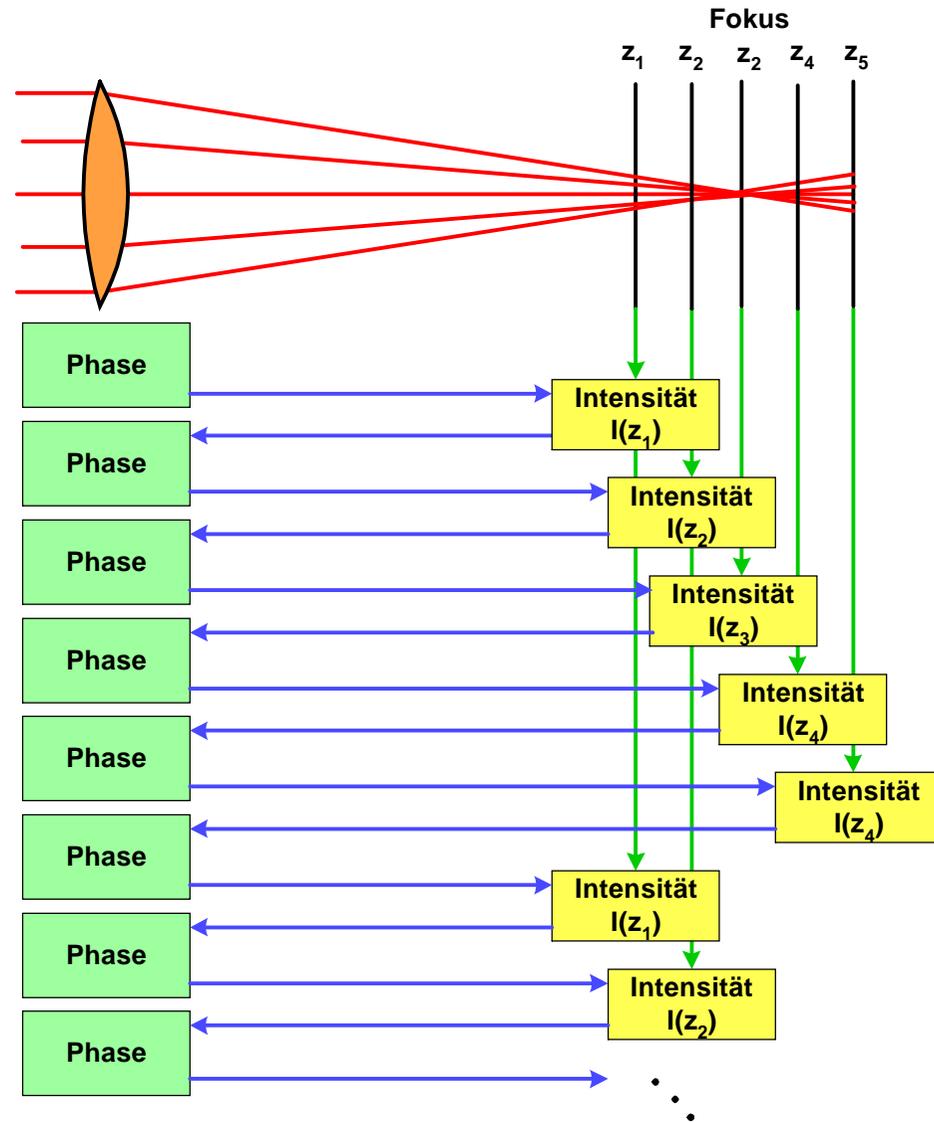


# Inverse Probleme in der Optik

## GS-Algorithmus



Verallgemeinerung :  
Alternierender Algorithmus  
für Auswertung eines  
z-Stacks



# Inverse Probleme in der Optik

## Gerchberg-Saxton-Algorithmus



- Modifizierte Algorithmen :

1. **Konvergenzbeschleunigung** durch zulassen von gedämpften Streufeldern (s.u.)

Input-Output-Algorithmus

Dynamische Constraints

Mittelung über alle  $z$  anstatt Pingpong

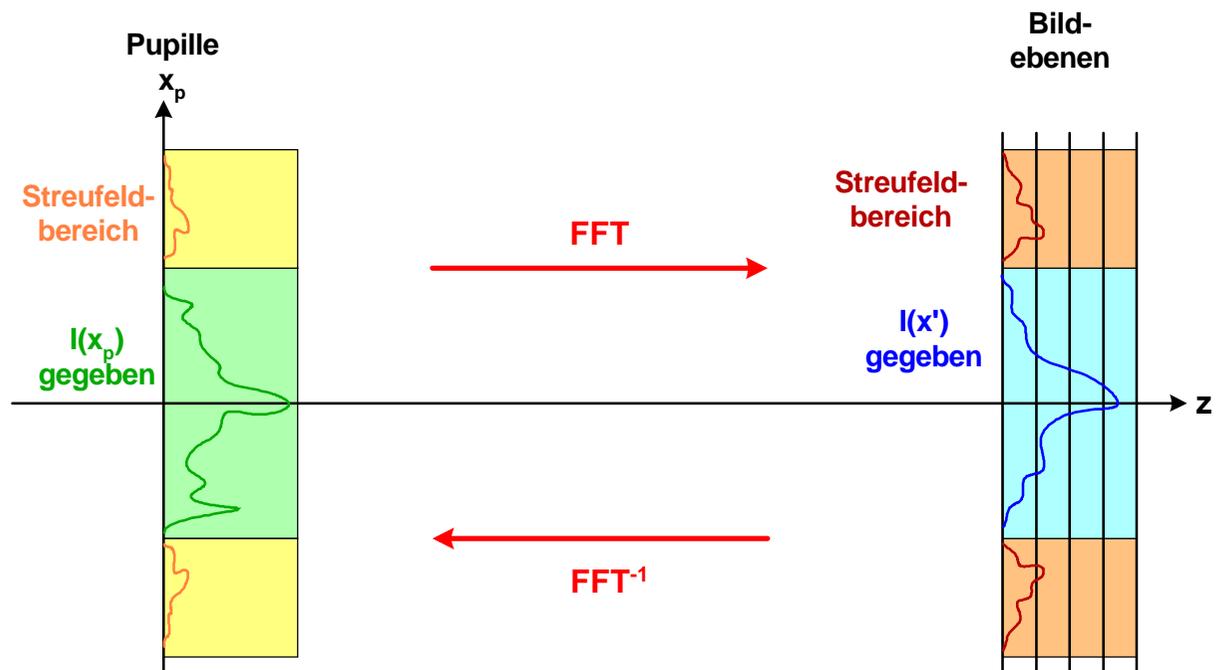
Hybrid-Algorithmus

Yang-Gu-Algorithmus

Lineare Prognose

.....

2. **Optimale Steuerung** der Schrittweiten und -richtungen (conjugate gradients)



# Inverse Probleme in der Optik

## Zwillingsbilder



- Gleiche Bildintensität bei **konjugiert komplexer Pupillenfunktion**

Zielphase	Retrieval, def=8	Retrieval, def=64

# Inverse Probleme in der Optik

## Inhalt



- 
- Problemstellung
  - Algorithmen
  - TIE-Verfahren
  - Gerchberg-Saxton-Algorithmus
  - **Systemprüfung**
  - Quantitative Phasenmikroskopie
  - Analog-digitale Bildgebung
  - Zusammenfassung

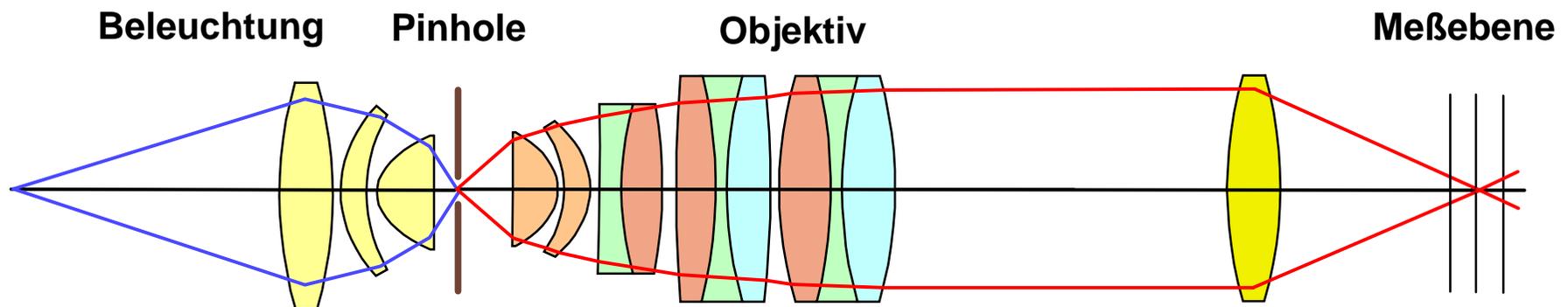
# Inverse Probleme in der Optik

## Aufbau für Systemprüfung



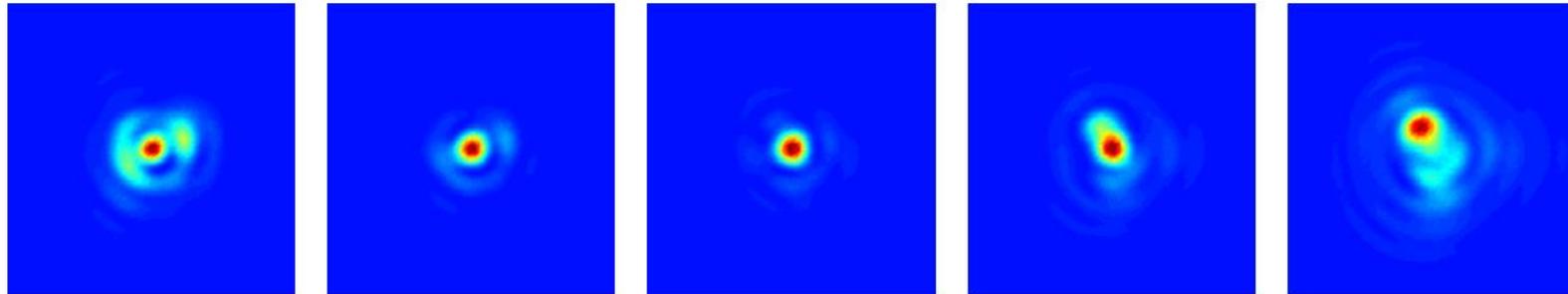
### Fragestellung :

1. Objekt bekannt  
Pinhole, Kante, Gitter,...
2. Intensitäts-z-Stack gemessen
3. Rückschluß auf Transferqualität des Optiksystems

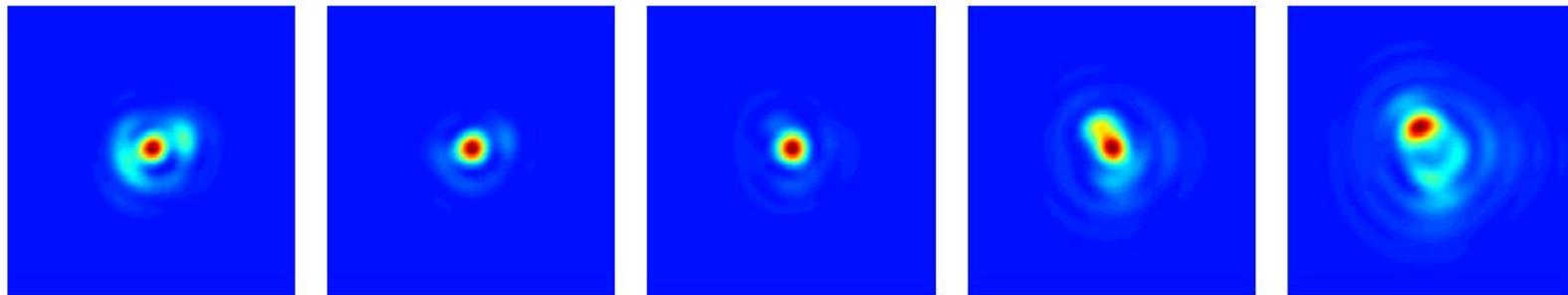


# Inverse Probleme in der Optik

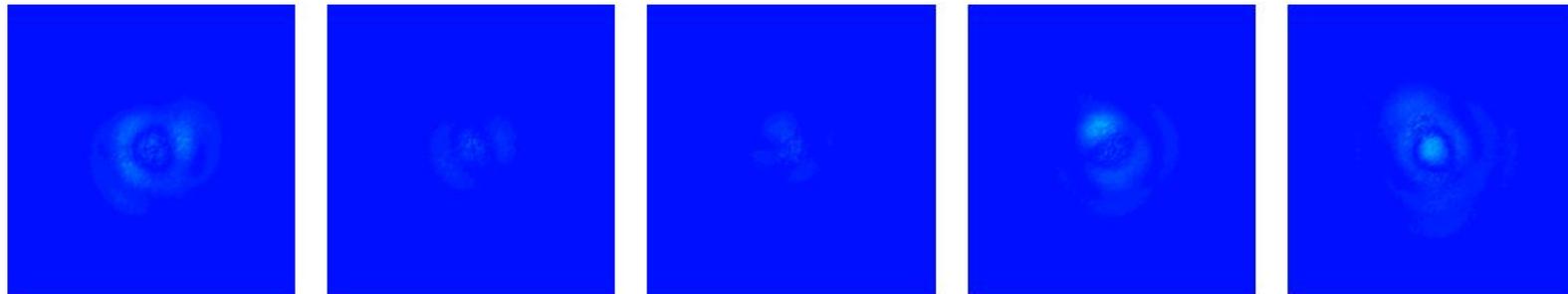
## Phase - Retrieval : Beispiel



Original Psf



Retrivalte Psf



Differenz, Fehler

# Inverse Probleme in der Optik

## Deconvolution



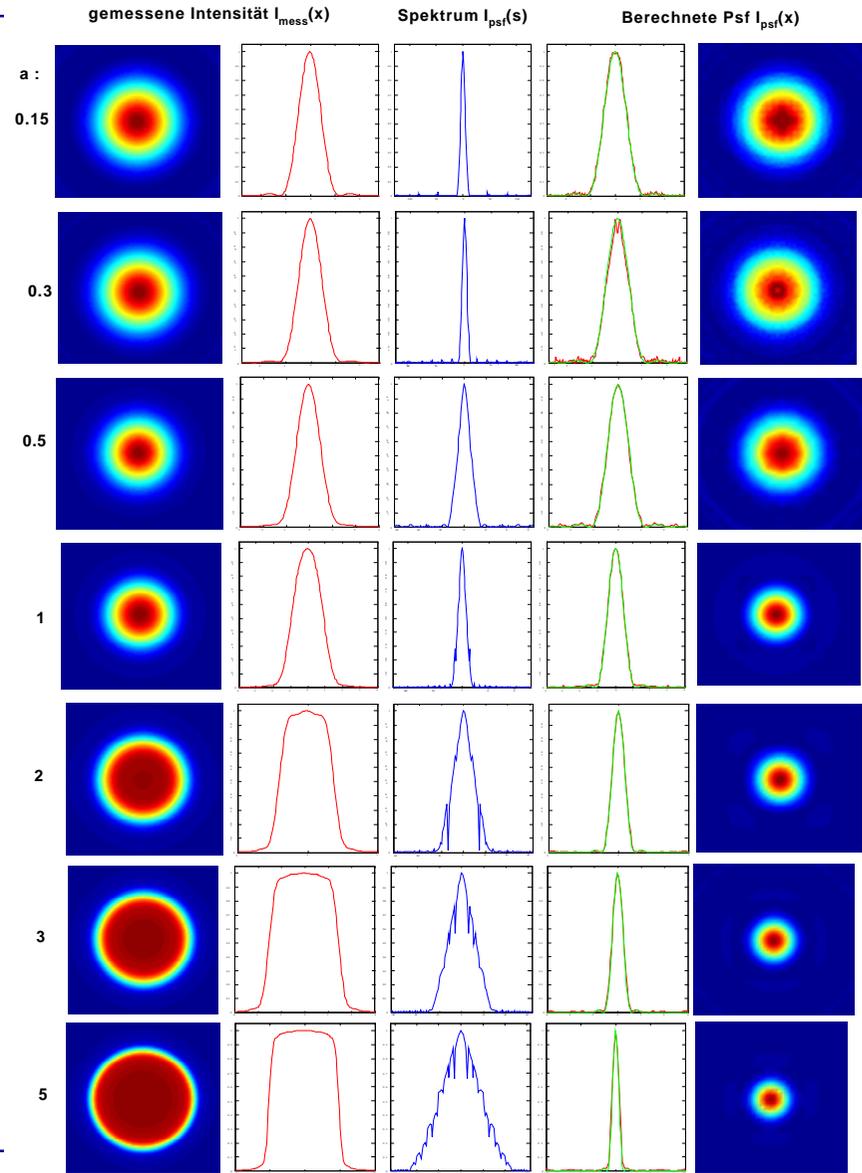
- Problem bei der Entfaltung :  
Nullstellen der Übertragung  
Tikhonov-Regularisierung

$$I_{psf}(s) = \frac{I_{object}^*(s) \cdot I_{image}(s)}{|I_{object}(s)|^2 + \mu}$$

- Wienerfilter als Nlsq-Problem

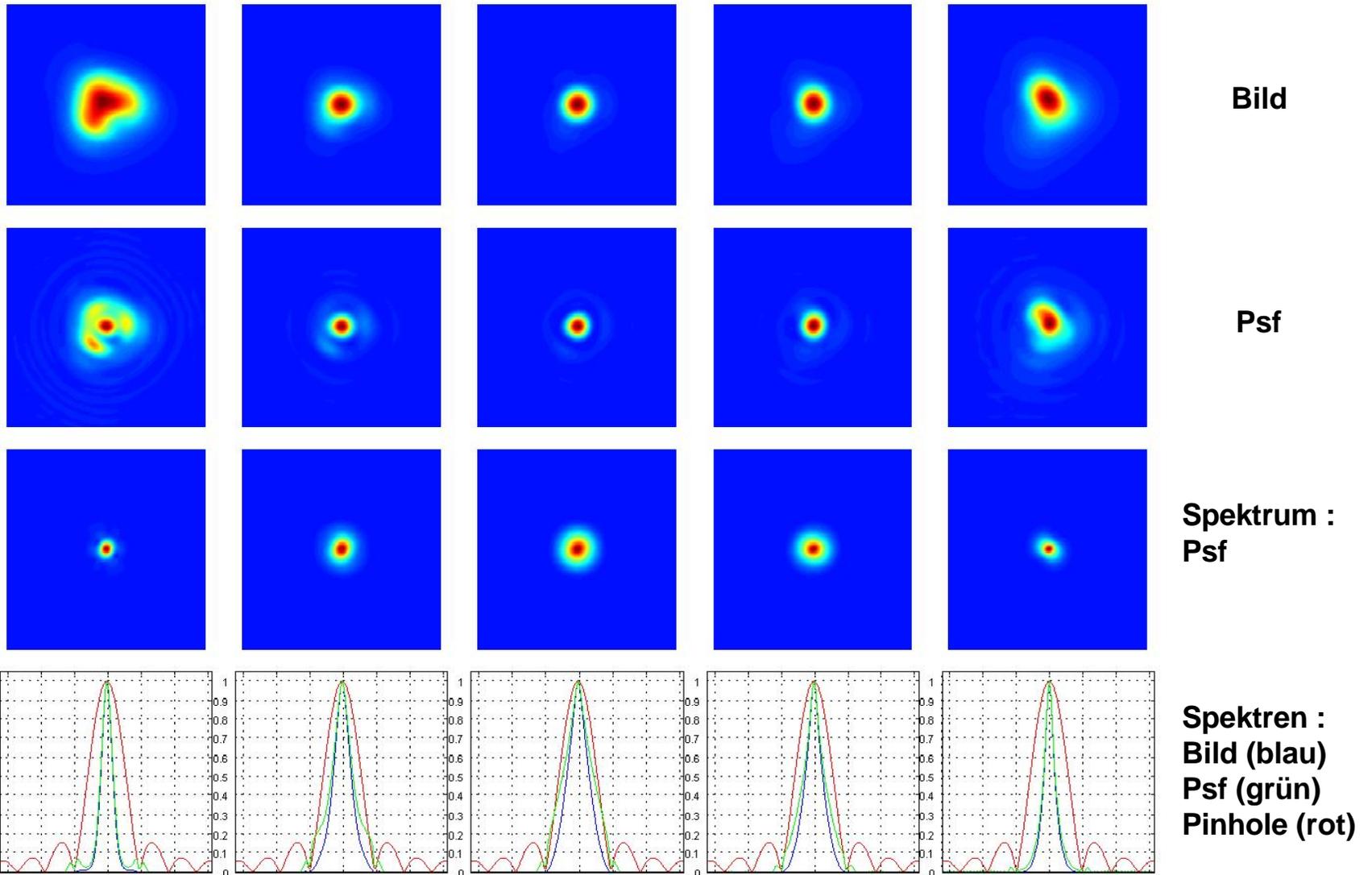
$$I_{filter}(s) = \frac{I_{object}^*(s)}{|I_{object}(s)|^2 + \frac{I_{noise}(s)}{I_{image}(s)}}$$

- Beispiel :  
Inkohärentes Bild einer Scheibe  
endlicher Größe



# Inverse Probleme in der Optik

## Phase - Retrieval aus z-Stacks : Deconvolution

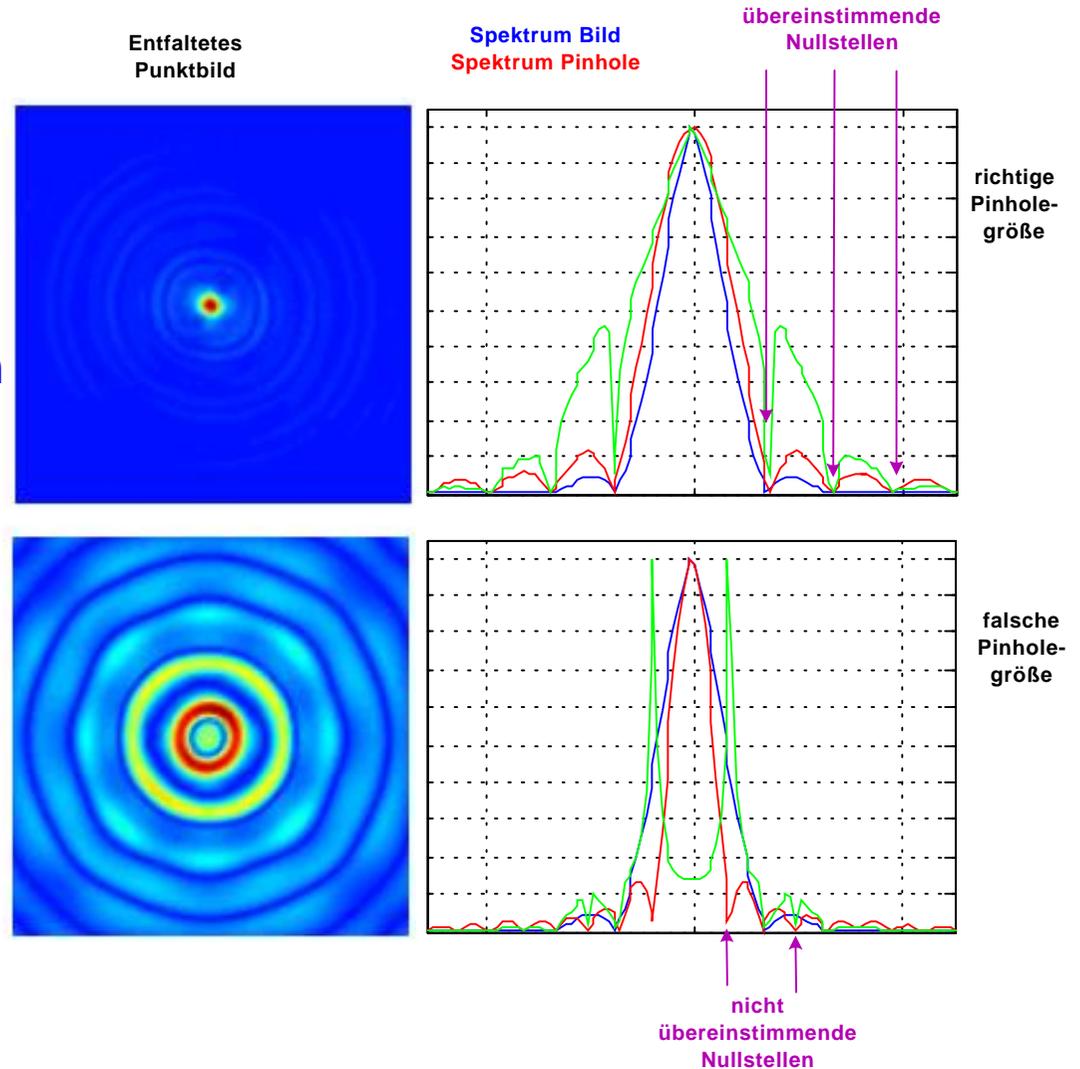


# Inverse Probleme in der Optik

## Phase - Retrieval aus z-Stacks : Deconvolution



- Pinholegröße genau bekannt :  
Nullstellen von Pinholespektrum  
und Bild stimmen überein
- **Pinholegröße nicht genau**  
bekannt :  
**Nullstellen** von **Pinholespektrum**  
und Bild stimmen nicht überein,  
fehlerhafte **Ringe** in Psf

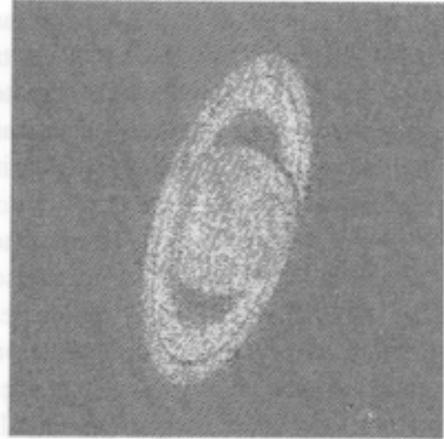


# Inverse Probleme in der Optik

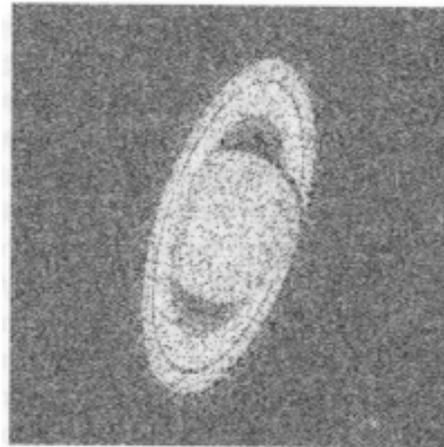
## Deconvolution : Einfluß des Regularisierungsparameters



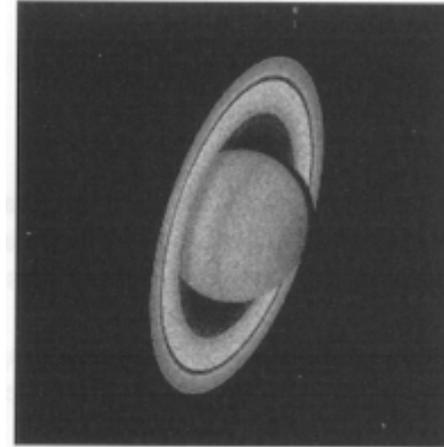
$\mu = 0$



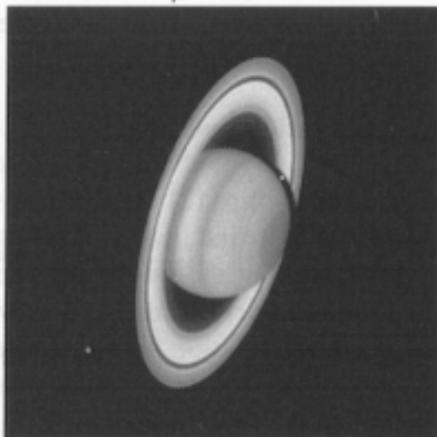
$\mu = 10^{-5}$



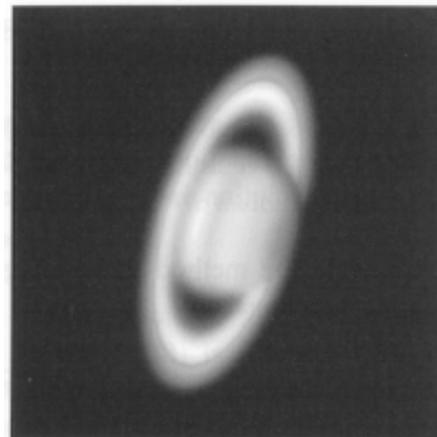
$\mu = 10^{-3}$



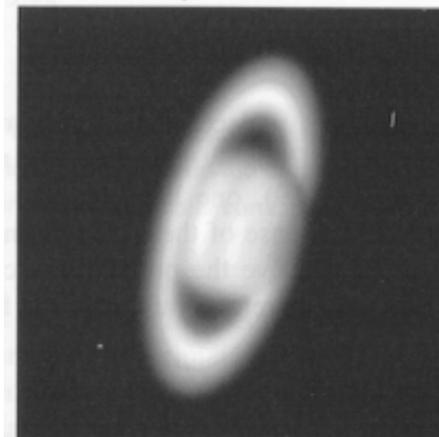
$\mu = 10^{-2}$



$\mu = 1$



$\mu = 1000$

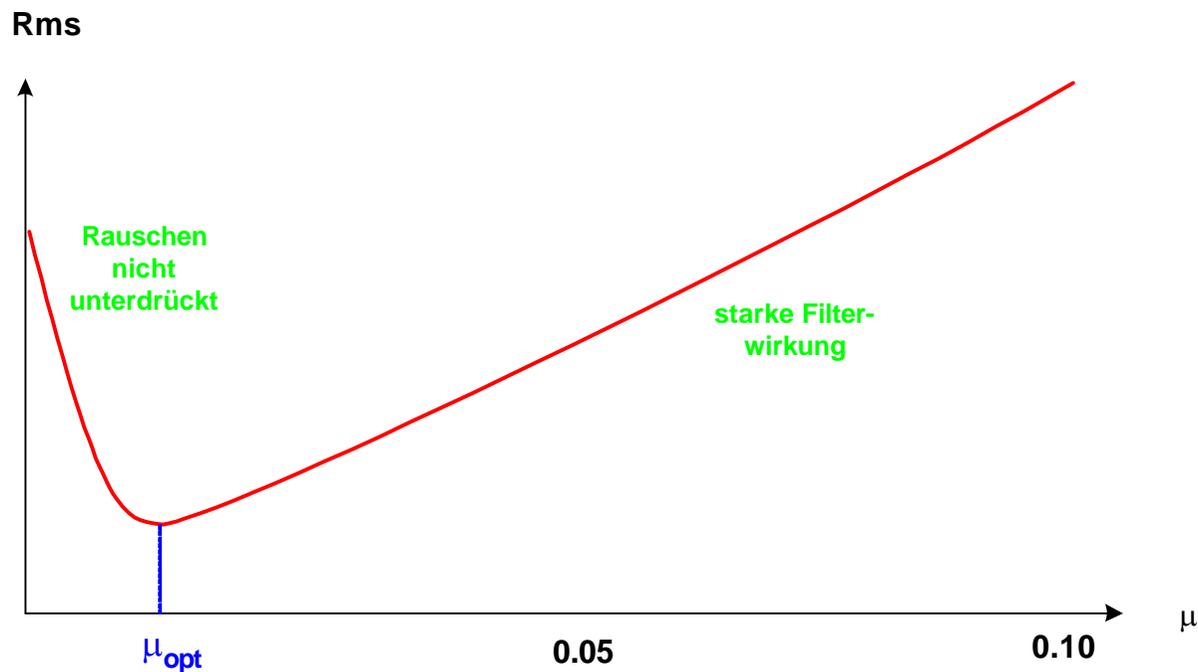


# Inverse Probleme in der Optik

## Regularisierung



- Tikhonov-Regularisierungsfaktor :
  1. Zu klein : Rauschen stört
  2. Zu klein : Filterwirkung führt zu Verfälschung
- Daher gibt es in Abhängigkeit von S/N und Strukturinhalt ein optimales  $\mu$

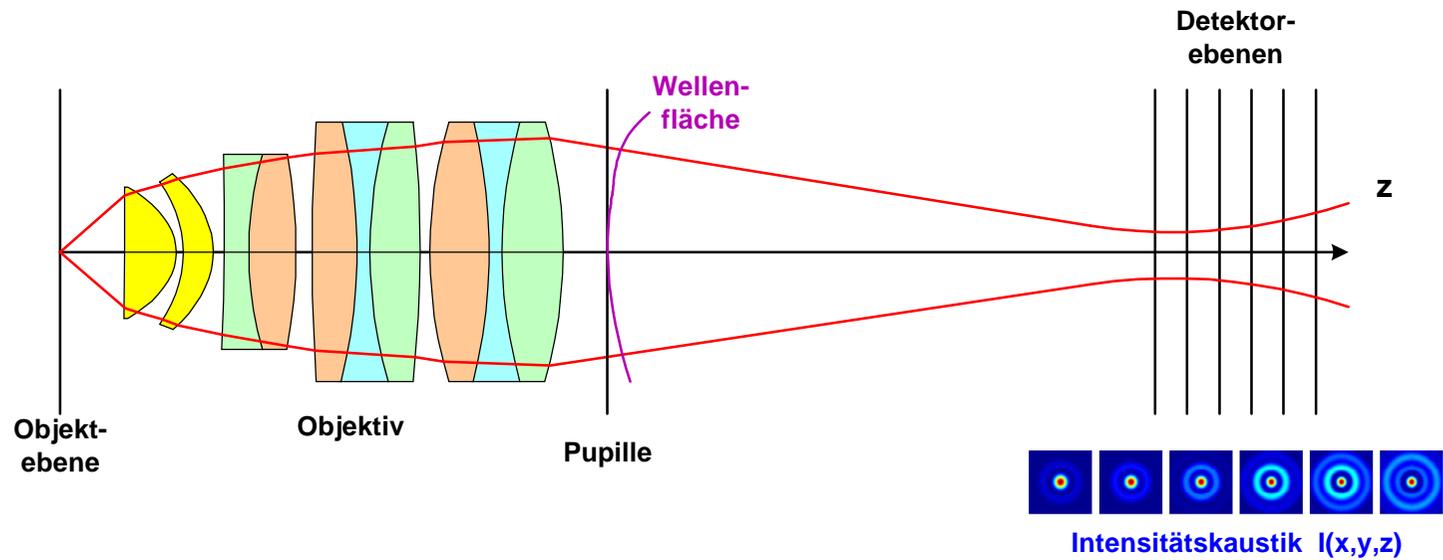


# Inverse Probleme in der Optik

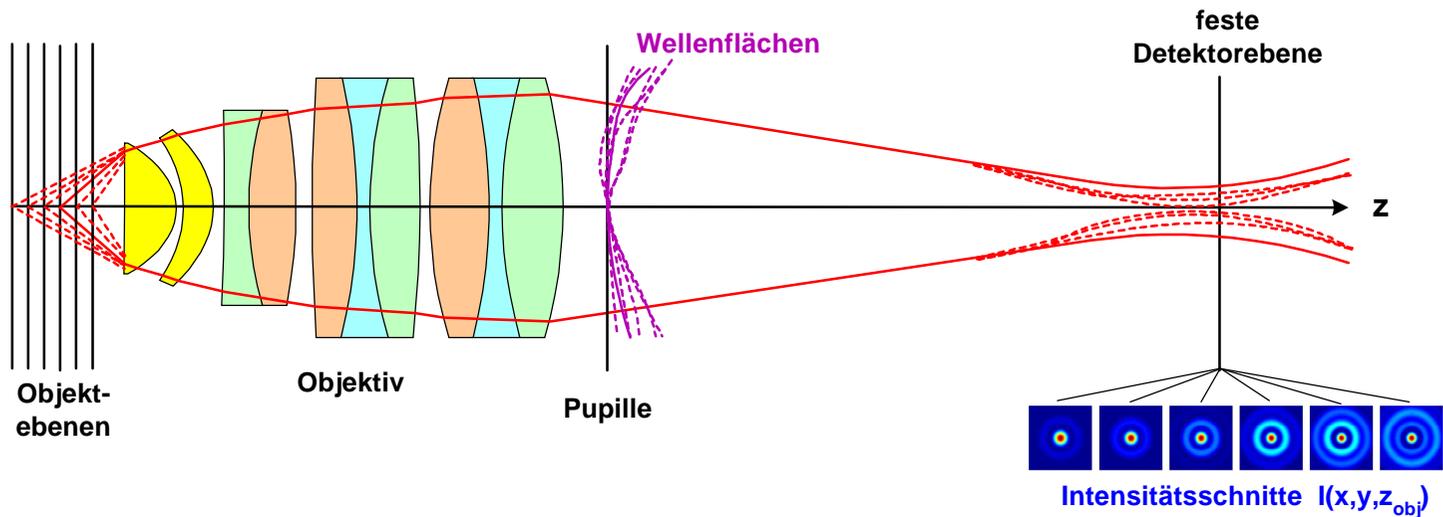
## Objektraum- / Bildraum-Defokussierung



**Bildraum-Defokussierung**



**Objektraum-Defokussierung**



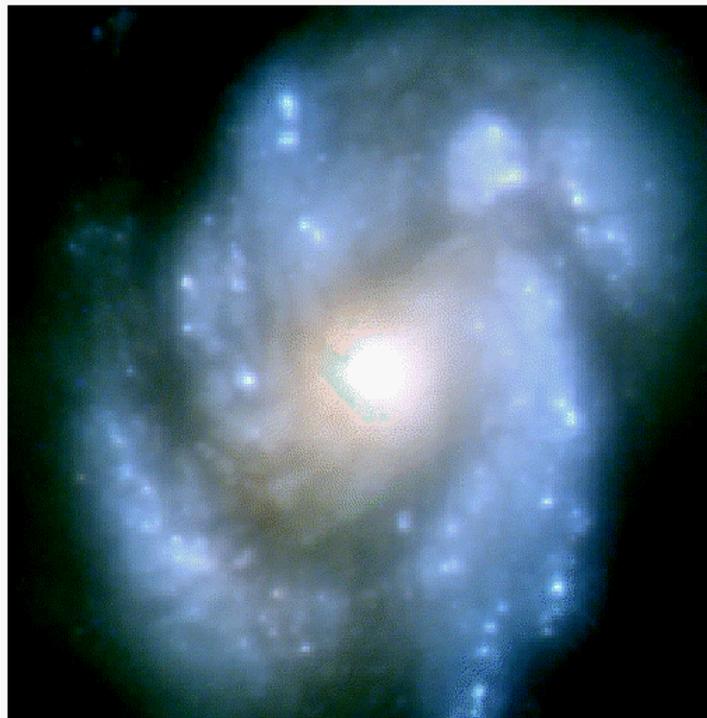
# Inverse Probleme in der Optik

## Deconvolution



- Deconvolution-Rechnung am Hubble-Space-Teleskop

Hubble original



Hubble korrigiert



# Inverse Probleme in der Optik

## Inhalt



- 
- Problemstellung
  - Algorithmen
  - TIE-Verfahren
  - Gerchberg-Saxton-Algorithmus
  - Systemprüfung
  - **Quantitative Phasenmikroskopie**
  - Analog-digitale Bildgebung
  - Zusammenfassung

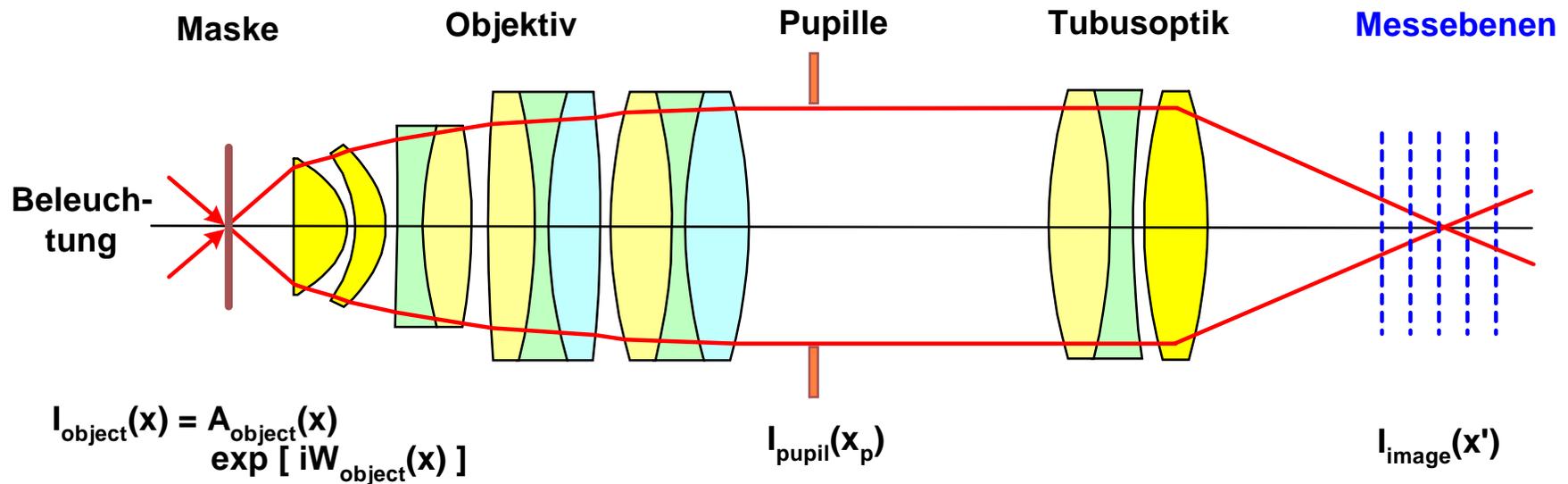
# Inverse Probleme in der Optik

## Problemstellung



### Fragestellung :

Messung von Phasenstrukturen



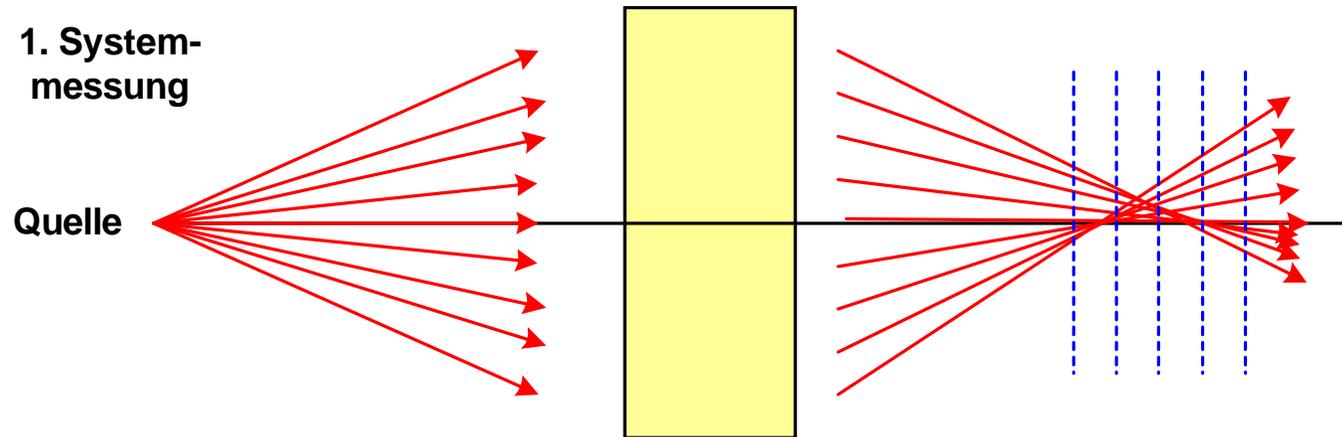
# Inverse Probleme in der Optik

## Problemstellung



Anschaulich

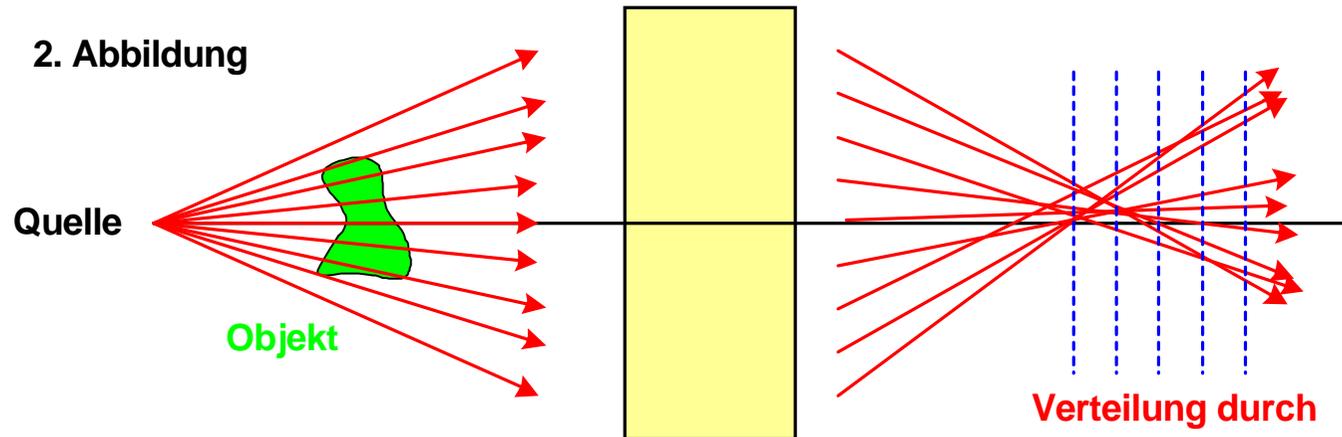
1. System-  
messung



Abbildungs-  
system

Messebenen

2. Abbildung



Objekt

Verteilung durch  
Objekt verändert

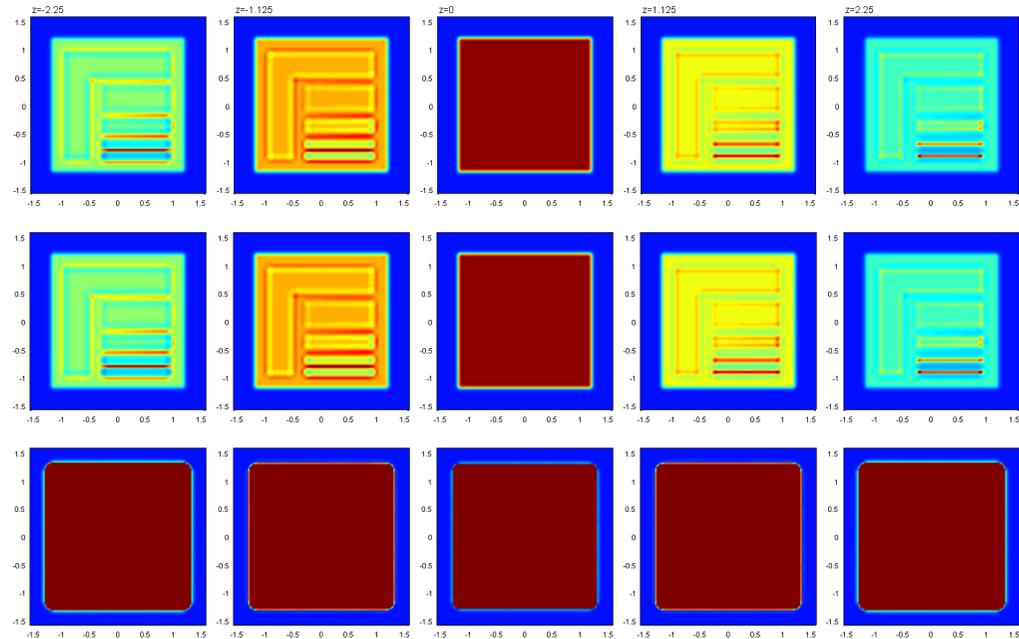
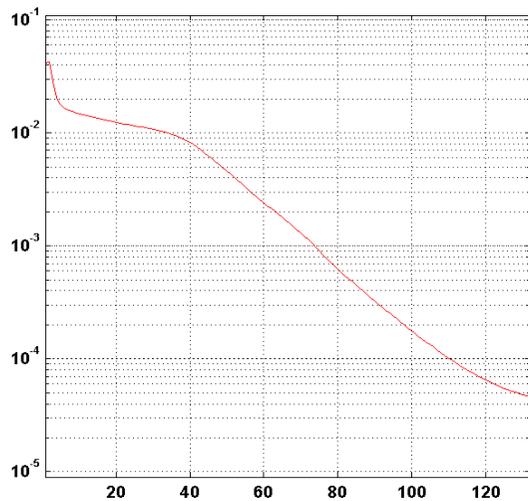
# Inverse Probleme in der Optik

## GS-Algorithmus : Erste Ergebnisse

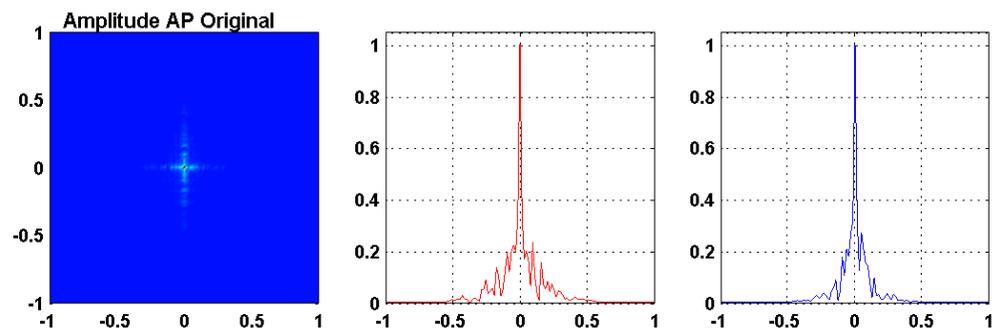


### Beispiel 1 :

- Synthetische Phasen-Amplituden-Masken
- Intensitäts-Stack im Bild
- Konvergenzverlauf



- Pupillenbild



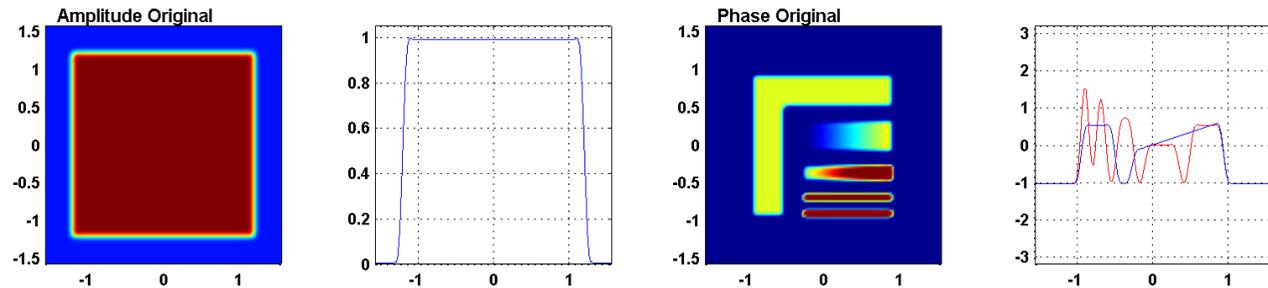
# Inverse Probleme in der Optik

## GS-Algorithmus



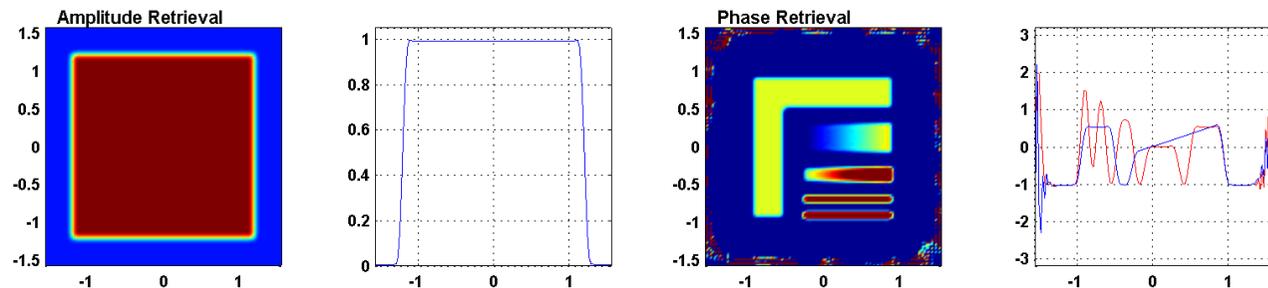
### Beispiel 1 :

- Maske

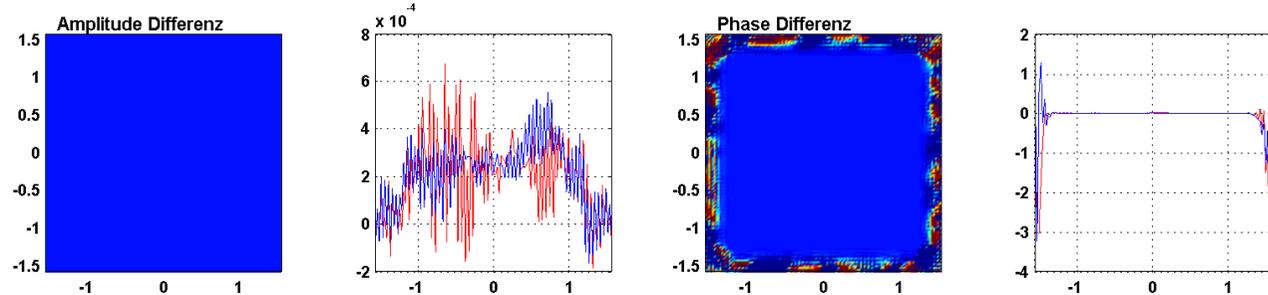


- Restfehler :

Phase :  $pv = 0.00532$   
 $rms = 0.00199$



Transm. :  $pv = 0.00094$   
 $rms = 0.00024$



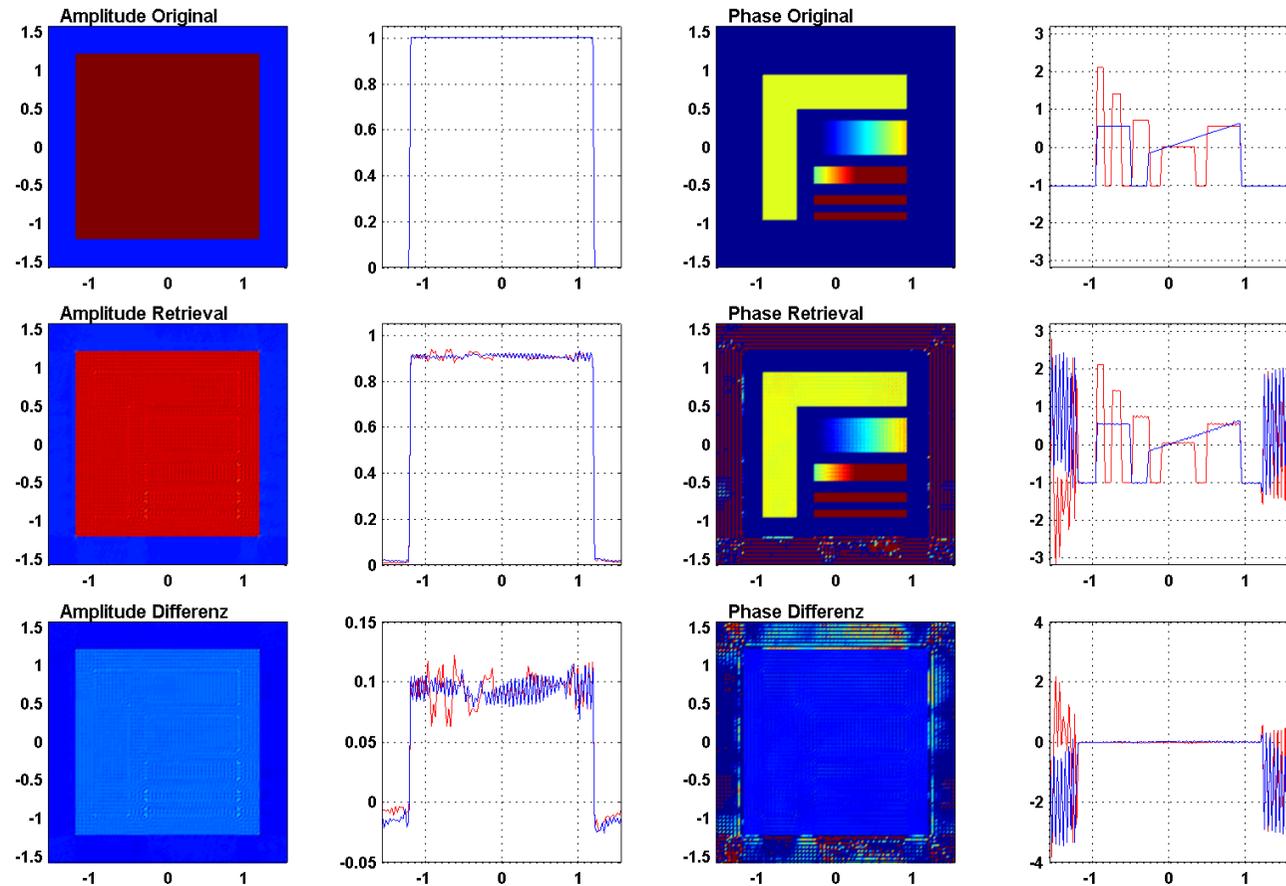
# Inverse Probleme in der Optik

## GS-Algorithmus



### Beispiel 2 :

- Harte Phasen-  
kanten



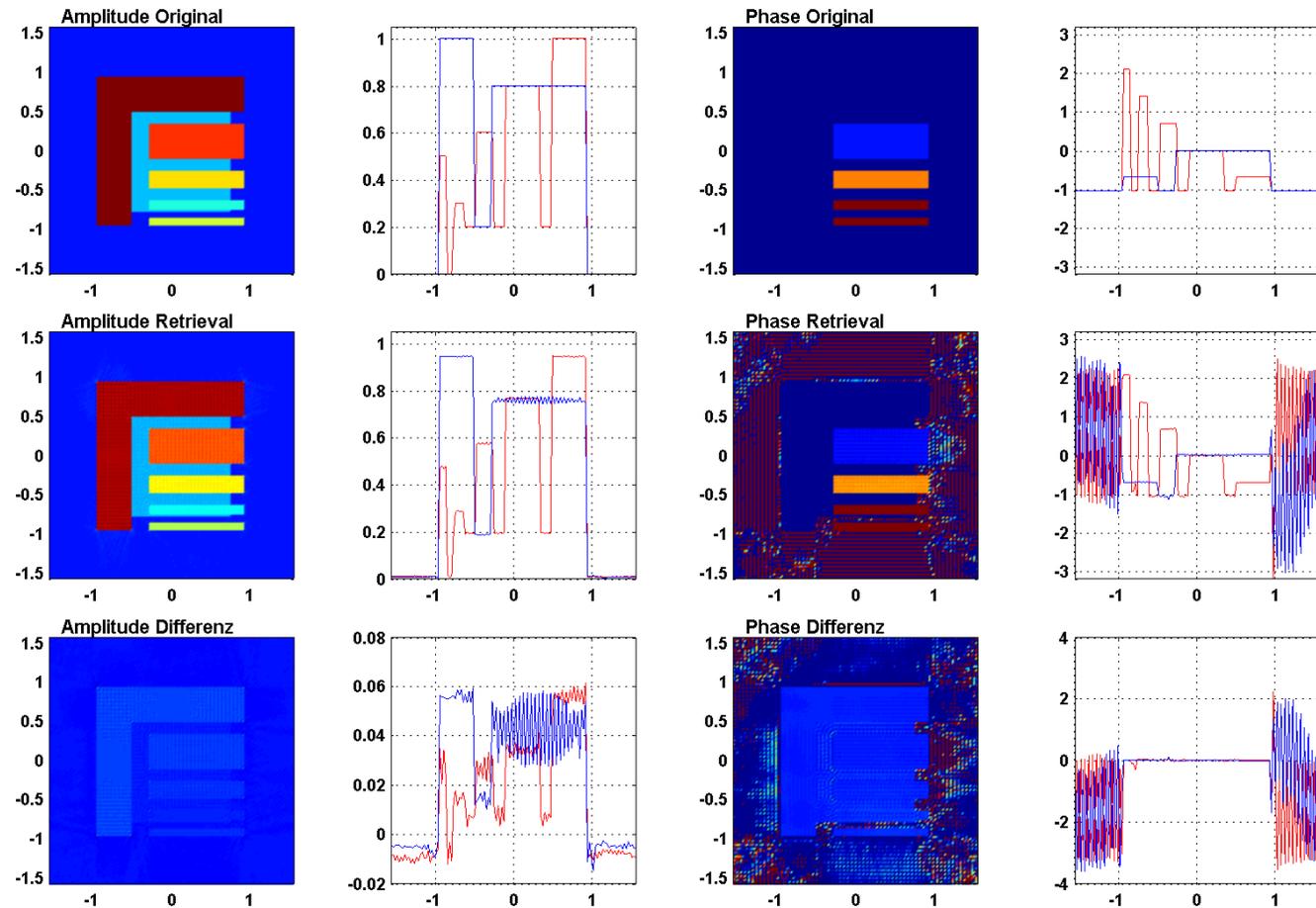
# Inverse Probleme in der Optik

## GS-Algorithmus



### Beispiel 3 :

- Harte Amplitudenkanten



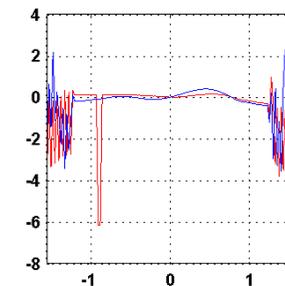
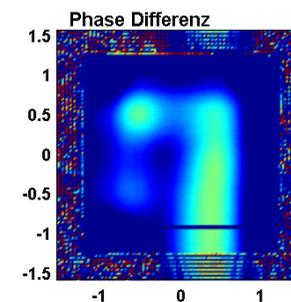
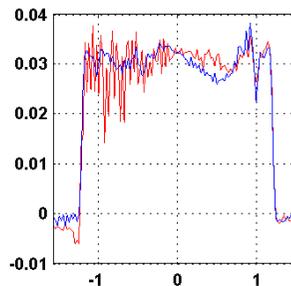
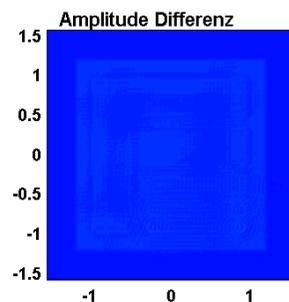
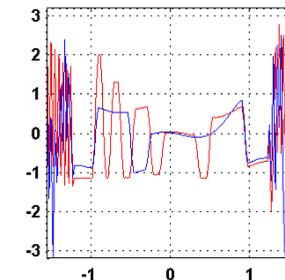
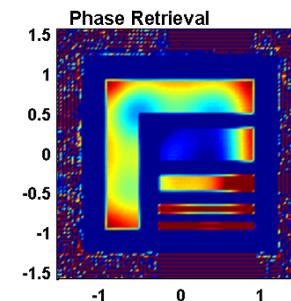
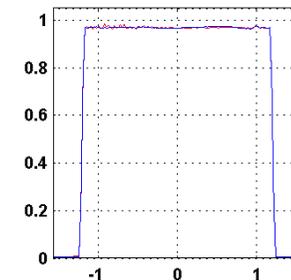
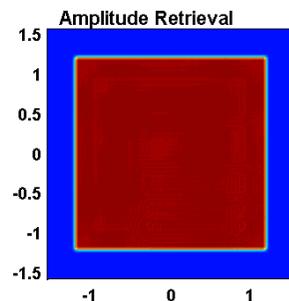
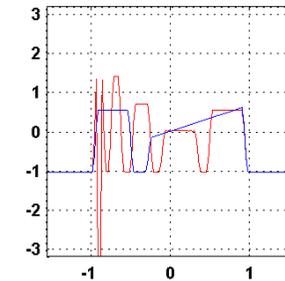
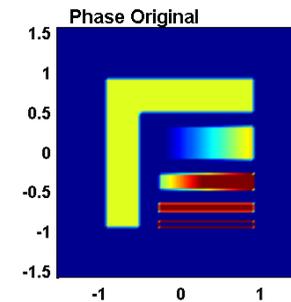
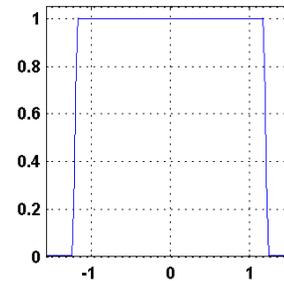
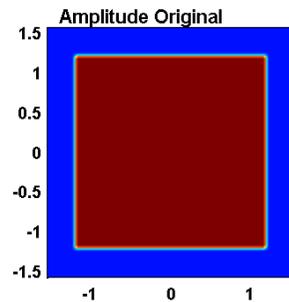
# Inverse Probleme in der Optik

## GS-Algorithmus



### Beispiel 5 :

- Ohne Pupillenbild



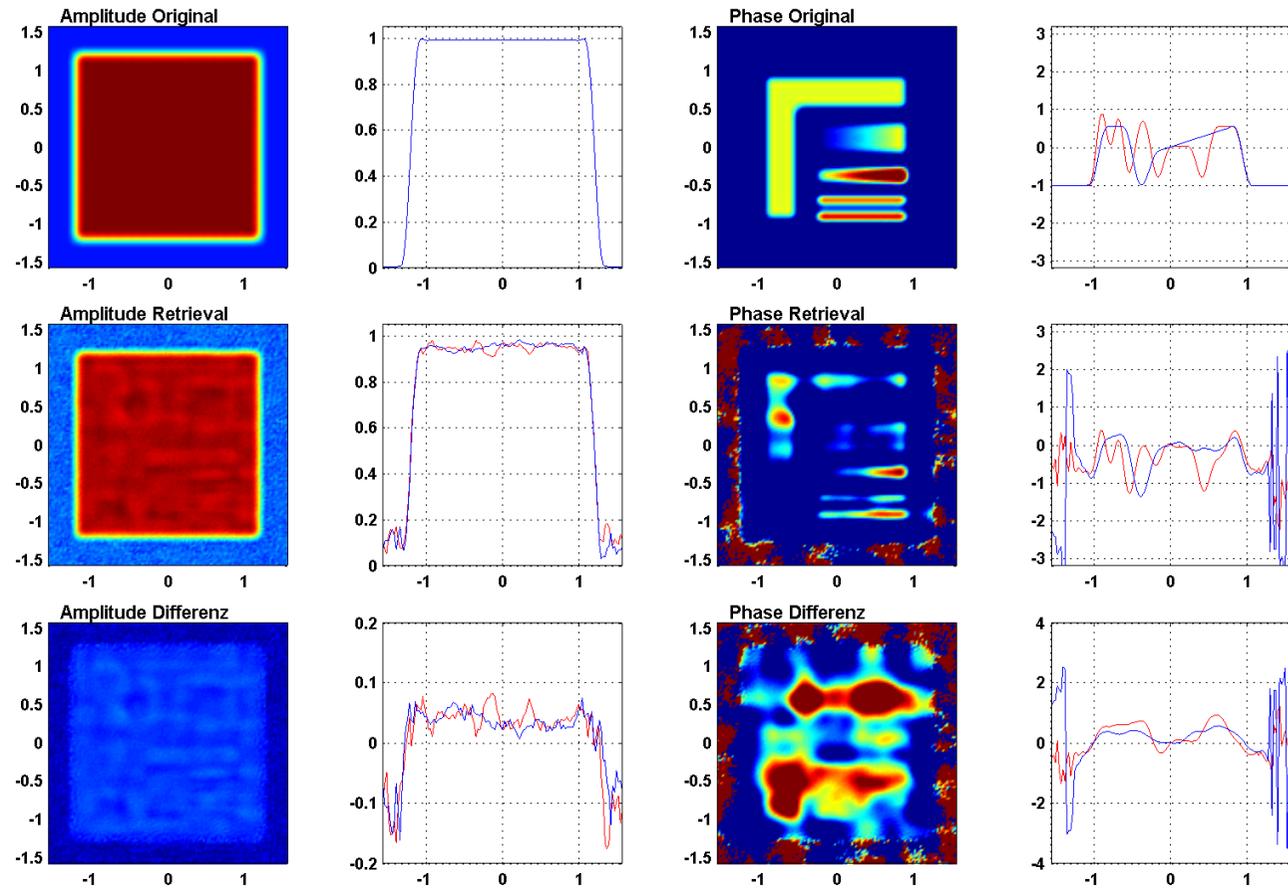
# Inverse Probleme in der Optik

## GS-Algorithmus



### Beispiel 6 :

- Mit 1% Rauschen im Bild



# Inverse Probleme in der Optik

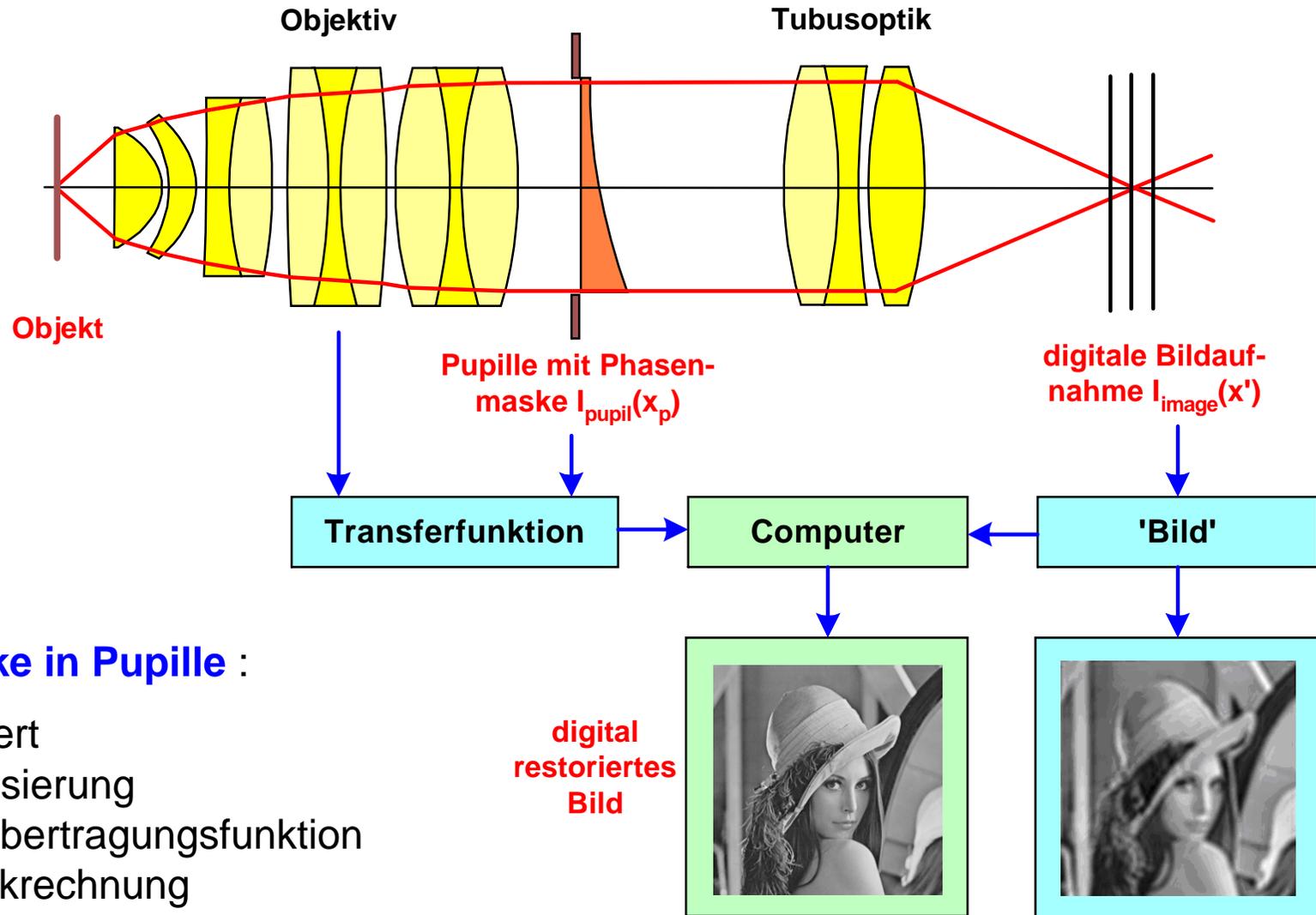
## Inhalt



- 
- Problemstellung
  - Algorithmen
  - TIE-Verfahren
  - Gerchberg-Saxton-Algorithmus
  - Systemprüfung
  - Quantitative Phasenmikroskopie
  - **Analog-digitale Bildgebung**
  - Zusammenfassung

# Inverse Probleme in der Optik

## EDF durch kubische Pupillenmaske



### Phasenmaske in Pupille :

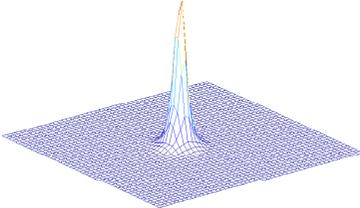
- Psf verbreitert
- bei Defokussierung konstante Übertragungsfunktion
- digitale Rückrechnung

# Inverse Probleme in der Optik

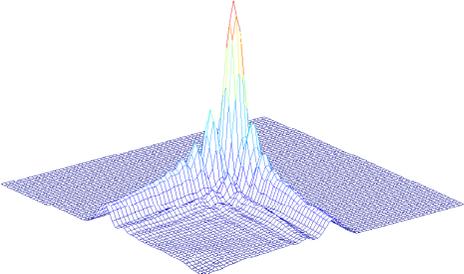
## Kubische Pupillenmaske



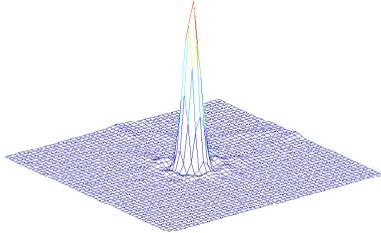
Psf traditionell



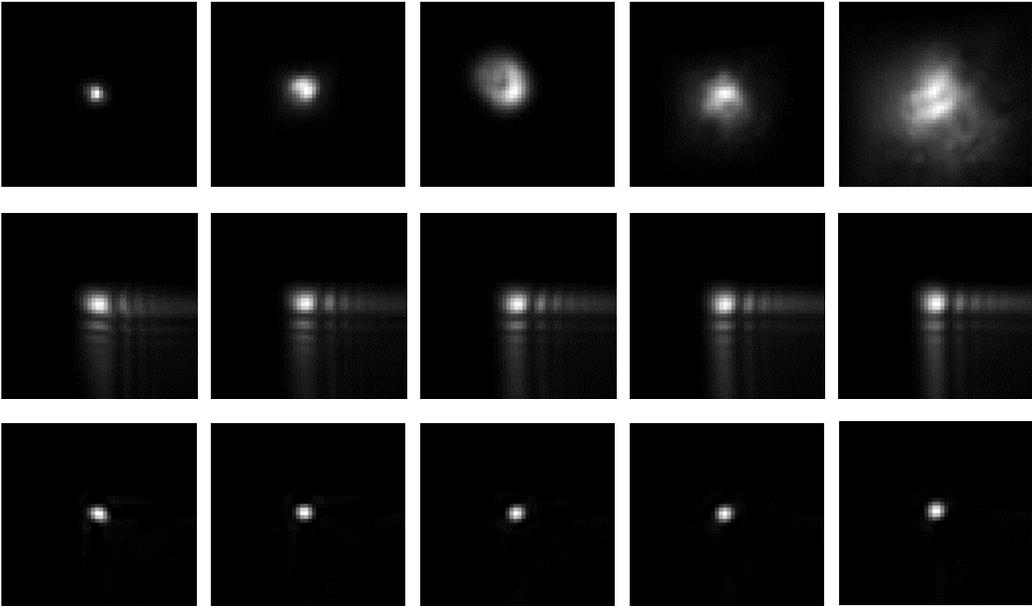
Psf mit Phasenmaske



Psf mit Phasenmaske entfaltet



Defokus →



normal

mit Maske

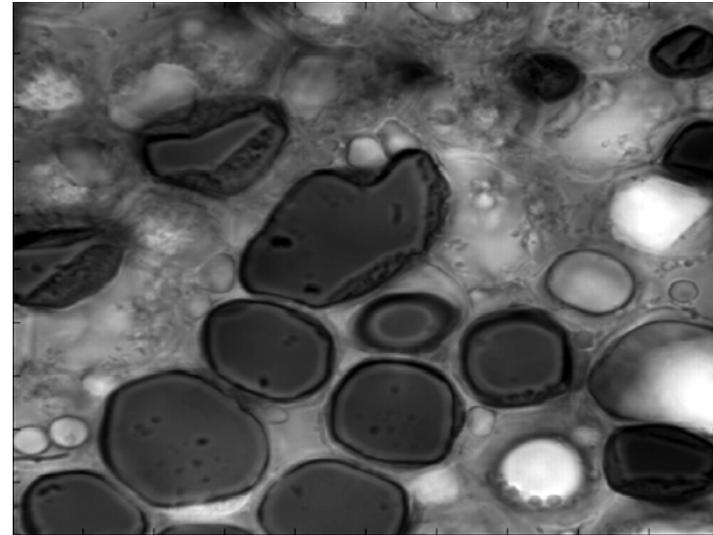
mit Maske entfaltet

# Inverse Probleme in der Optik

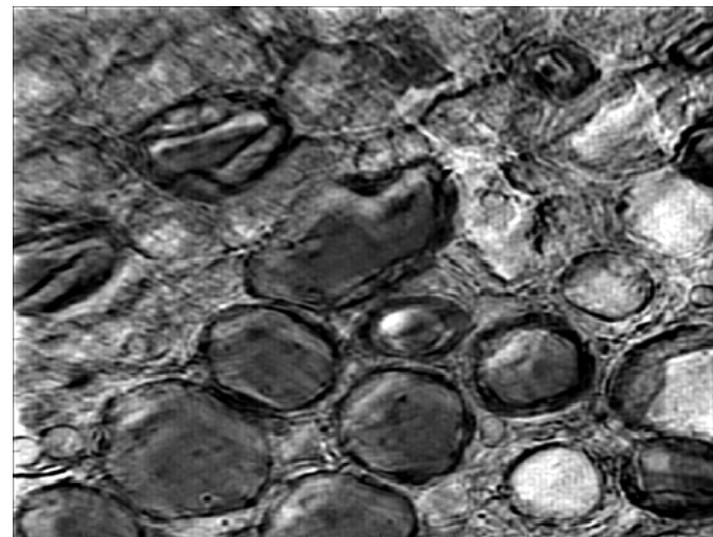
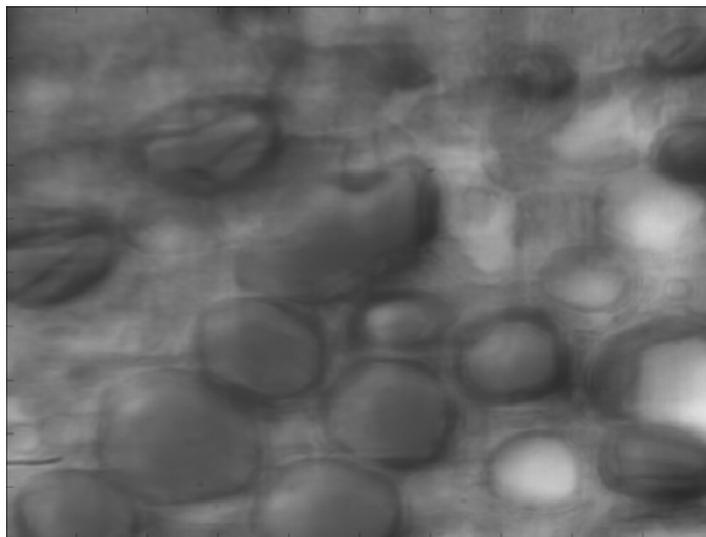
## Erweiterte Schärfentiefe : mikroskopische Bilder



- Traditionelles mikroskopisches Bild



- Bildaufnahme mit Phasenmaske,  
Ohne / mit Entfaltung

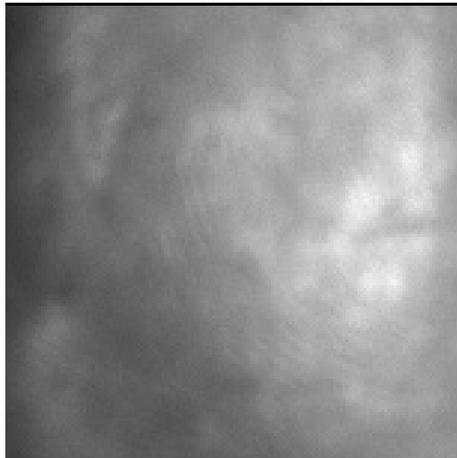


# Inverse Probleme in der Optik

## Erweiterte Schärfentiefe : Beispiele



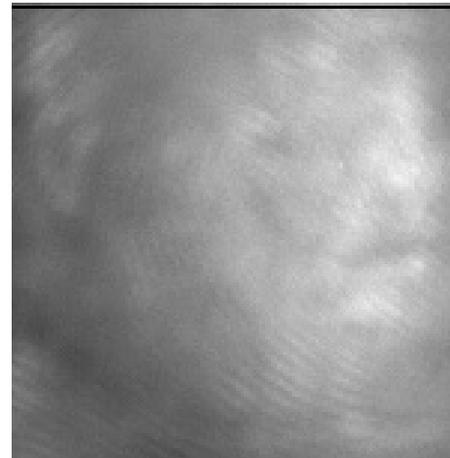
Defokus +



fokussiert



Defokus -



Traditionelles  
mikroskopi-  
sches Bild



Bildaufnahme  
mit Phasen-  
maske, mit  
Entfaltung

# Inverse Probleme in der Optik

## Inhalt



- 
- Problemstellung
  - Algorithmen
  - TIE-Verfahren
  - Gerchberg-Saxton-Algorithmus
  - Systemprüfung
  - Quantitative Phasenmikroskopie
  - Analog-digitale Bildgebung
  - Zusammenfassung

# Inverse Probleme in der Optik

## Zusammenfassung

---



- Digitale Nachverarbeitung aufgenommener Intensitätsverteilungen wird immer wichtiger
- Spezielle Anwendungen :
  - Phasenstrukturen sichtbar machen
  - Restfehler beseitigen
  - Auflösung verbessern
  - Schärfentiefe vergrößern
- Algorithmen der inversen Fragestellung sind problematisch
  - Konditionierung
  - Rauschen
  - Rechenzeit